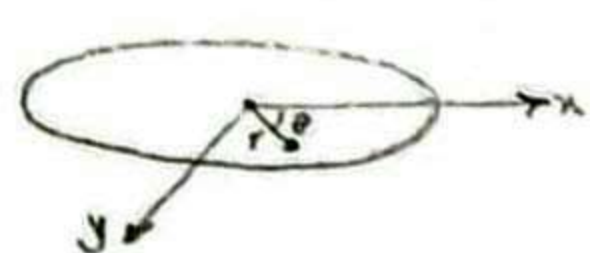


مثال دوم: معادلات کامل بر روی گرد

تعداد لایه‌های بر روی ورق گرد، به مراتب کمتر از ورق چهار گوش بوده و دلیل این ورق، ساده تر از حل ورق چهار گوش می باشد. لذا پیش از پرداختن به روش های حل معادله کامل بر روی ورق چهار گوش به بررسی روابط در روش حل ورق های گرد می پردازیم.

معادلات کامل بر ورق گرد را می توان از نو یافت. ابتدا نقش فرم معادلات بر پایه انتساب مختصات از دکارت به قطبی بررسی داده می شود.



$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \theta \quad \text{I} & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r \cdot \sin \theta \quad \text{II} & \theta &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = (\cos \theta)^{-1}, & \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} = (\sin \theta)^{-1}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} * \quad \frac{\partial r}{\partial n} &= \frac{2r \cos \theta}{2\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}} \\ &= \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad \text{مشتق نسبت به } y & \quad 0 = \cos \theta \frac{\partial r}{\partial y} - r \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \text{II} \quad \text{مشتق نسبت به } x & \quad 0 = \sin \theta \frac{\partial r}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{1}{\cos \theta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{r \sin \theta} \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{\sin \theta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{r \cos \theta} \end{aligned}$$

در این مثال:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) \left( \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$w_{,xx} = w_{,rr} \cos^2 \theta + \left( \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right) \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} w_{,\theta} \right)$$

$$w_{,yy} = w_{,rr} \sin^2 \theta + \left( \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right) \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} w_{,\theta} \right)$$

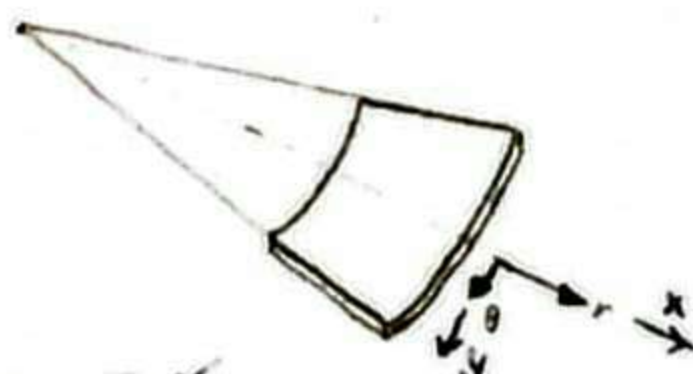
$$w_{,ny} = - \left( \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} - w_{,rr} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} w_{,\theta} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\nabla^2 w = w_{,xx} + w_{,yy} = w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta}$$

$$\nabla^4 w = \nabla^2 (\nabla^2 w) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$$

در این رابطه گشتاور نیز، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} M_x = -D (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \\ M_y = -D (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \\ M_{xy} = -D (1-\nu) w_{,ny} \end{cases} \quad \begin{cases} Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \\ Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \end{cases}$$



باتوجه به اینکه انتساب محور x افقی است. برای سادگی آن را در جهت r نقطه مورد بررسی انتساب می کنیم.

در نتیجه می توانیم اندیشه های x, y را با r, theta جایگزین نموده (theta=0) در روابط مربوط به w\_{,xx}, ...

$$\begin{cases} M_r = -D \left[ w_{,rr} + \nu \left( \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right) \right] \\ M_\theta = -D \left[ \left( \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right) + \nu w_{,rr} \right] \\ M_{r\theta} = -D (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} w_{,\theta} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) \\ Q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w) \end{cases}$$

در نتیجه، مقادیر تنش بصورت زیر خواهند شد:

$$\sigma_r = \frac{12 M_r \cdot z}{t^3}, \quad \sigma_\theta = \frac{12 M_\theta \cdot z}{t^3}, \quad \tau_{r\theta} = \frac{12 M_{r\theta} \cdot z}{t^3}$$



$$V_r = Q_r + \frac{1}{r} M_{r\theta, \theta} = -D \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) + \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} w_{,r\theta} - \frac{1}{r^2} w_{,\theta} \right) \right]$$

$$V_\theta = Q_\theta + M_{r\theta, r} = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w) + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} w_{,r\theta} - \frac{1}{r^2} w_{,\theta} \right) \right]$$

پایسج درتق کرد:

$$\nabla^4 w = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w = \frac{P}{D}$$

پایسج معادله حاکم برتق کرد:

دارای دو بخش عمومی و خصوصی است:

$$w = w_h + w_p$$

$w_p$  حل خصوصی بوده و برای بار وارده تعیین می گردد و  $w_h$  پایسج عمومی ( $\nabla^4 w_h = 0$ ) است. برای یافتن  $w_h$  از ایده جدایش متغیرها بهره می گیریم:

$$w_h(r, \theta) = f(r) \cdot g(\theta)$$

اگر فرض  $g(\theta)$  را شدت می بنویسیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$w_h = \sum_{n=0}^{\infty} [f_n(r) \cos(n\theta) + f_n^*(r) \sin(n\theta)]$$

که طبق تئوری باضرائب و استیج  $r$  است. از جایگزینی پایسج بالا در رابطه  $\nabla^4 w_h = 0$  خواهیم داشت:

$$f_0 = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r$$

$$f_0^* = 0$$

$$f_1 = A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r$$

$$f_1^* = A_1^* r + B_1^* r^3 + C_1^* r^{-1} + D_1^* r \ln r$$

...

$$(n \geq 2) \rightarrow f_n = A_n r^n + B_n r^{-n} + C_n r^{n+2} + D_n r^{-n+2}$$

$$(n \geq 2) \rightarrow f_n^* = A_n^* r^n + B_n^* r^{-n} + C_n^* r^{n+2} + D_n^* r^{-n+2}$$

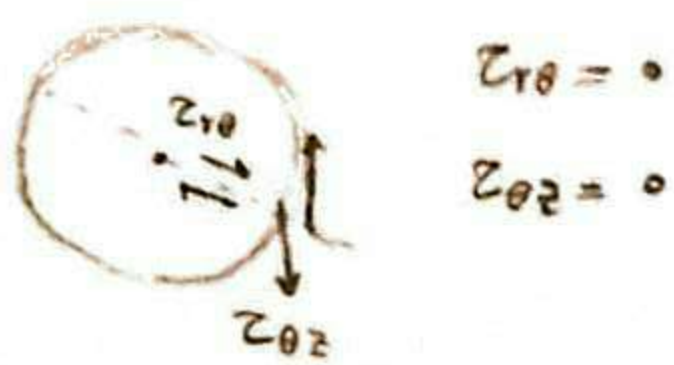
(فقط دو ضربه اول از ضرایب عمومی تبعیت می کند و بقیه می کنند)

( $f_0^*$  می تواند چون ازین ضربه در  $w_h$  معیار  $\sin$  نیز می تواند بود.)

فرض متقارن:

اگر بارگذاری و شرایط مرزی متقارن باشد، ششقات نسبت به  $\theta$  و  $Q_\theta$  و  $M_{r\theta}$  صفر خواهند بود.

(از مقدار تنش های برشی در انتهای خطوط تقارن، صفرند.)



$$z_{r\theta} = 0$$

$$z_{\theta z} = 0$$

$$(I) \begin{cases} M_r = -D \left[ \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right] \\ M_\theta = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right] \end{cases}$$

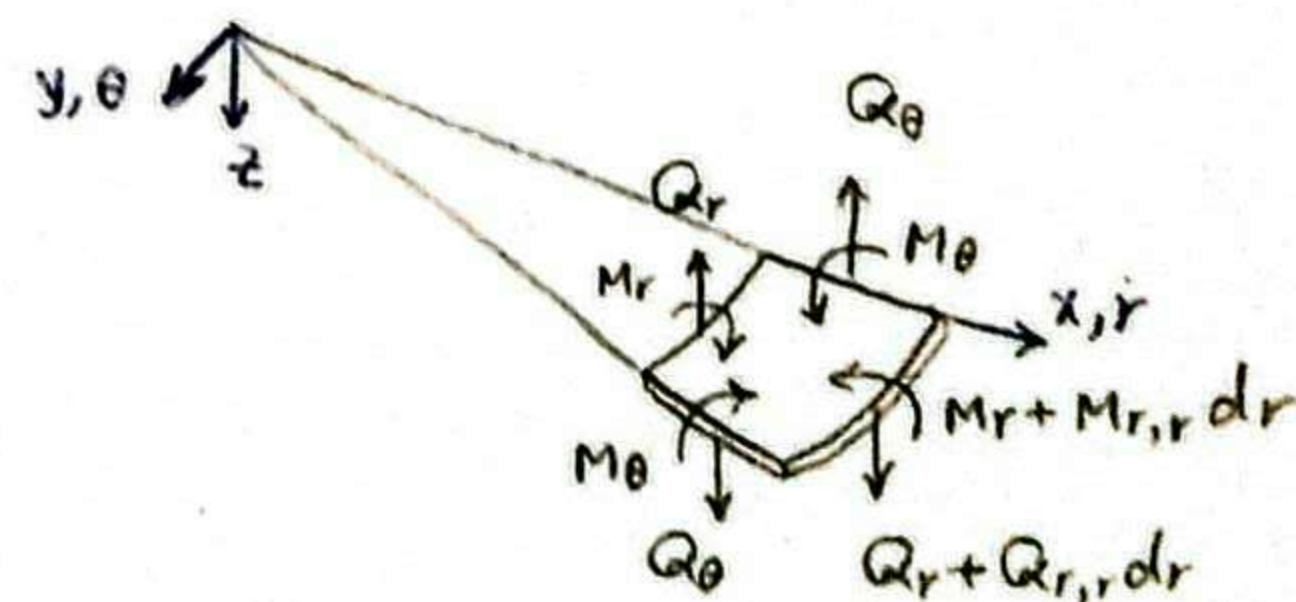
$$(I) Q_r = -D \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -D \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right]$$

$$\nabla^4 w = \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{+P}{D}, \quad \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right] = \frac{P}{D} \quad (II)$$

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \\ \sigma_\theta = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \\ \epsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \end{cases}$$



$$A = \pi r^2 \rightarrow dA = 2\pi r \cdot dr$$

$$2\pi r \cdot Q_r = \int_0^r P(2\pi r) dr$$

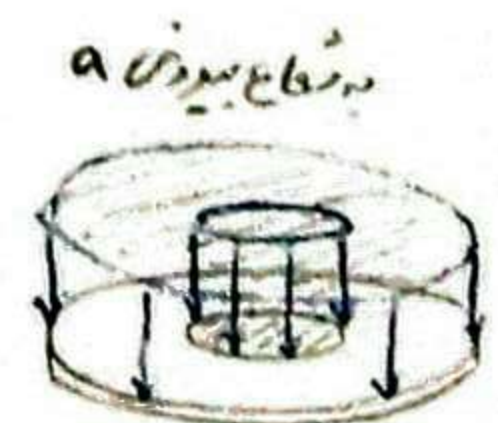
که می شود

$$\Rightarrow Q_r = \frac{1}{r} \int_0^r P r dr$$

بدین ترتیب، معادله ضریب به دو ضربه قابل دسترس است:

- با استفاده از رابطه  $Q_r$  و از رابطه (I)

با استفاده از رابطه (II)



$$q = EI w''', \quad v = EI w'', \quad M = EI w'$$

در تمام موارد مصالح (2):

التم در موردی فوق نمی توان از رابطه سوم (استفاده) استفاده کرد.

دوین قسمت می خواهیم از رابطه دوم (5) استفاده کنیم.

چون تعیین تغییرات  $M$  ساده نیست! چون طول به  $r$  های مختلف تغییر می کند.



مثال: ورق گرد تحت بار گسترده یکپارچه (بالعاط غزل)  $(n=0)$



$$w = c_1 \ln r + c_2 r^2 \ln r + c_3 r^2 + c_4 + \frac{P_0 r^4}{64D}$$

از حل رابطه (1) خواهیم داشت:

نخستین اصل این پاسخ متناظر با پاسخ معادله دیفرانسیل است.

از پاسخ کلی سرگردیده، تنها پاسخ  $w$  در حل معادله آتکینس گردد. به تعبیر دیگر، برای یافتن شرایط مرزی و بارگذاری متعارف، پاسخ عمومی معادله  $w$  را به شرایط مرزی ورق بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} r=a \rightarrow w=0, \frac{dw}{dr}=0 \\ r=0 \rightarrow w, Q_r = \text{معیّن} \end{cases} \quad \leftarrow w \text{ در } \frac{dw}{dr}$$

$$\Rightarrow w = \frac{P_0}{64D} (a^2 - r^2)^2 \rightarrow w_{\max} = \frac{P_0 a^4}{64D} \quad (r=0)$$

و با توجه به روابط گشتاور و تنش، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} M_r = \frac{P_0}{16} [(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2] \\ M_\theta = \frac{P_0}{16} [(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2] \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{3P_0 z}{4t^3} [(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2] \\ \sigma_\theta = \frac{3P_0 z}{4t^3} [(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2] \end{cases}$$

برای محاسبه ماکزیم گشتاور، مقایسه گشتاور  $M_r$  و  $M_\theta$  را در  $r$  ها می‌کنیم.

$$\begin{aligned} r=0 &\rightarrow M_r = M_\theta = \frac{(1+\nu)P_0 a^2}{16} \\ r=a &\rightarrow M_r = -\frac{P_0 a^2}{8}, \quad M_\theta = -\nu \frac{P_0 a^2}{8} \end{aligned}$$

درین ترتیب، مقدار ماکزیم گشتاور،  $M_r$  در نقطه  $r=a$  در  $\sigma_r$  می‌باشد.

$$\Rightarrow (\sigma_r)_{\max} = \frac{6(M_r)_{\max}}{t^2} = -\frac{3P_0}{4} \left(\frac{a}{t}\right)^2$$

مثال: ورق گرد تحت بار گسترده



همانند مثال قبلی است اما شرایط مرزی متفاوتی دارد که عبارتند از:

$$\begin{cases} r=a \rightarrow w=0, M_r=0 \\ r=0 \rightarrow w, Q_r = \text{معیّن} \end{cases}$$

$$\Rightarrow w = \frac{P_0 a^4}{64D} \left( \frac{r^4}{a^4} - 2\frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{r^2}{a^2} + \frac{5+\nu}{1+\nu} \right) \rightarrow w_{\max} = \frac{P_0 a^4}{64D} \frac{5+\nu}{1+\nu} \quad (r=0)$$

$$\begin{cases} M_r = \frac{P_0}{16} (3+\nu)(a^2 - r^2) \\ M_\theta = \frac{P_0}{16} [(3+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2] \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{3P_0 z}{4t^3} (3+\nu)(a^2 - r^2) \\ \sigma_\theta = \frac{3P_0 z}{4t^3} [(3+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2] \end{cases}$$

$$r=0 \rightarrow (M_r)_{\max} = (M_\theta)_{\max} = \frac{(3+\nu)P_0 a^2}{16} \Rightarrow (\sigma_r)_{\max} = (\sigma_\theta)_{\max} = \frac{-3(3+\nu)P_0}{8} \left(\frac{a}{t}\right)^2$$

روش دیگر: روش جمع آثار

$$\text{Diagram of a plate with a point load } \frac{P_0 a^2}{8} \text{ at the center, equivalent to the original problem.} \quad \frac{P_0 a^2}{8} = -M_r|_{r=a}$$

در تکیه‌گاه ساده، تنش عابثه است و ضربه ماکزیم نیز متغیر است!

اگر شرایط مرزی مشخص نباشد، می‌توان بصورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفت چون حالت بحرانی تر است.

از مقایسه نتایج بدست آمده، می‌توان این نتیجه کلی را گرفت که اگر بارگذاری یکپارچه و تنش عابثه در ورق دارای تکیه‌گاه ساده، بر مقدار

مقادیر متناظر از ورق گیردار است.

حقیقتاً اگر شرایط مرزی مشخص شود، شرایط بحرانی تر می‌شود. (در آمار تنش و ضربه بیشتر دارد)





جابجایی ذرات می تواند از لحاظ تنش مقاطع  $(Mr)$  یا جابجایی بین اعداد آنها  $(\tau_{rz})$  حاصل شود. در اثر  $Q_r$  می باشد.

برای تنش برشی

$$\tau_{rz} = \frac{dw_z}{dr} = \frac{\tau_{rz}}{G} = \frac{3Q_r}{2Gt}$$

$$Q_r = \frac{-P_0 r}{2}$$

برای تنش تحت بار استاده  $P_0$  خواهیم داشت:



$$2\pi r^2 P_0 = 2\pi r Q_r$$

$$\Rightarrow w_s = \int_a^r dw_s = \frac{3P_0}{8Gt} (a^2 - r^2) = \frac{P_0 t^2}{16(1-\nu)D} (a^2 - r^2), \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\hookrightarrow w|_a, \quad w(a) = 0$$

در نتیجه مقدار خمیدگی برابر است با مجموع درجه های داده از تنش و تنش برشی.

$$w = w_b + w_s$$

bending

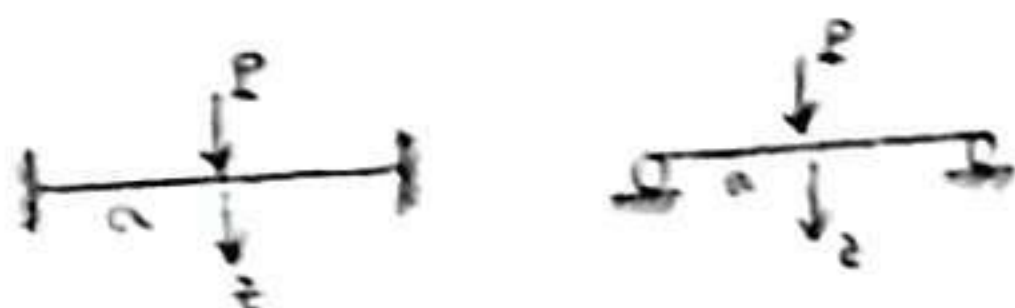
برای مقایسه  $\nu = 0.3$  و  $r = 0$  را در لحاظ می گیریم و در نتیجه:

$$\frac{w_s}{w_b} = \frac{3}{2} \left( \frac{t}{a} \right)^2$$

( $w_s$  قابل چشم پوشی است)

$$\frac{t}{a} \leq 0.1 \Rightarrow \frac{w_s}{w_b} \leq 0.015 \Rightarrow w_s \ll w_b$$

مثال: ورق گرد تخت بار مستقیم



یافتن رابطه خمیدگی بر پایه حاکم از روابط (I) و (II) امکان پذیر است.

برای استفاده از رابطه (I) خواهیم داشت:

$$2\pi r Q_r = P \quad Q_r = \frac{-P}{2\pi r}$$

(قرارداد:  $Q_r$  حول مرکز ورق برش با مقدار  $a$  یکسان و در نتیجه منفی است.)

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dw}{dr}) \right] = -\frac{Q_r}{D} \Rightarrow w = \frac{P}{8\pi D} (r^2 \ln r - \frac{r^2}{4}) + C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3 + C_4 r^2 \ln r$$

معمولاً  $C_4 = 0$

برای ورق گرد دار خواهیم داشت:

$$w = \frac{P}{16\pi D} (2r^2 \ln \frac{r}{a} + a^2 - r^2) \rightarrow w_{max} = \frac{Pa^2}{16\pi D}$$

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{3Pz}{\pi t^3} \left[ (1+\nu) \ln \frac{a}{r} - 1 \right] \\ \sigma_\theta = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) = \frac{3Pz}{\pi t^3} \left[ (1+\nu) \ln \frac{a}{r} - 1 \right] \end{cases}$$

در  $r=0$  اشیاء منحنی می باشد که منحنی با فرضیات شعاعی  $(\tau_{rz}=0)$  سازگار است. در نتیجه پاسخ  $\sigma_r$  و  $\sigma_\theta$  در مرکز می باشد  $Q_r$  و  $Q_\theta$  می باشد.

برای ورق یکپارچه ساده خواهیم داشت:

$$w = \frac{P}{16\pi D} \left( 2r^2 \ln \frac{r}{a} + \frac{3+\nu}{1+\nu} (a^2 - r^2) \right) \rightarrow w_{max} = \frac{Pa^2}{16\pi D} \cdot \frac{3+\nu}{1+\nu}$$

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{3Pz}{\pi t^3} (1+\nu) \ln \frac{a}{r} \\ \sigma_\theta = \frac{3Pz}{\pi t^3} \left[ (1+\nu) \ln \frac{a}{r} + (1-\nu) \right] \end{cases}$$

بنابراین خمیدگی و تنش های ورق با یکدیگر سازگار است.



مثال: ورق گرد تخت گشتاورهای برابر داخلی و خارجی

از معادله خمیدگی ورق استفاده می‌کنیم:

$$Q_r = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] = 0$$

$$w = \frac{1}{4} c_1 r^2 + c_2 \ln r + c_3$$

شرایط مرزی:

$$\begin{cases} r=a & w=0, M_r=M_2 \\ r=b & M_r=M_1 \end{cases}$$

$$M_r = -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)$$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{2} \frac{r^2 - a^2}{a^2 - b^2} \frac{M_1 b^2 - M_2 a^2}{(1+\nu)D} + \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \frac{M_1 - M_2}{(1-\nu)D} \ln \frac{r}{a}$$

$$\begin{cases} M_r = - \frac{M_1 b^2 - M_2 a^2}{a^2 - b^2} + \frac{a^2 b^2 (M_1 - M_2)}{r^2 (a^2 - b^2)} \\ M_\theta = - \frac{M_1 b^2 - M_2 a^2}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 b^2 (M_1 - M_2)}{r^2 (a^2 - b^2)} \end{cases}$$

تغییرات توزیع گشتاور در نقاط مختلف، محلی نیست! (تغییرات  $M_r$  و  $M_\theta$ )

$$\begin{matrix} M_r \rightarrow \sigma_r & M_1 \rightarrow P_1 \\ M_\theta \rightarrow \sigma_\theta & M_2 \rightarrow P_2 \end{matrix}$$

$$\int \sigma_r \cdot 2\pi r \cdot dr = M$$

بکم از رابطه این تغییر به رابطه توزیع تنش در ورق می‌رسیم.

لکه برای یک لایه  $dz$  از ورق و بار خمیدگی، معادلات نوشته شده است.

مثال: ورق گرد تخت تحت بار متمرکز داخلی

شعاع داخلی:  $b$   
شعاع خارجی:  $a$



$$2\pi r Q_r = -2\pi b Q_1$$

$$Q_r = -Q_1 \frac{b}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) \right] = Q_1 \frac{b}{rD}$$

$$w = \frac{Q_1 b r^2}{4D} (\ln r - 1) + c_1 \frac{r^2}{4} + c_2 \ln r + c_3$$

شرایط مرزی:

$$\begin{cases} r=a & w=0, M_r=0 \\ r=b & M_r=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow w = \frac{Q_1 a^2 b}{4D} \left\{ \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left[ \frac{3+\nu}{2(1+\nu)} - \frac{b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a} \right] + \frac{r^2}{a^2} \ln \frac{r}{a} + \frac{2b^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} \ln \frac{b}{a} \cdot \ln \frac{r}{a} \right\}$$

اگر  $b=0$  قرار دهیم، معادله خمیدگی ورق تحت بار متمرکز در وسط ورق بدست می‌آید.

(با وجود آنکه در مثال کسری  $M_r$  در مرکز ورق است.)

(یعنی اثر خمیدگی  $M_r$  در مثال‌های قبلی در اینجا قابل توضیح است.)

مثال: ورق گرد تخت تحت بار متمرکز (تغییر شعاع)

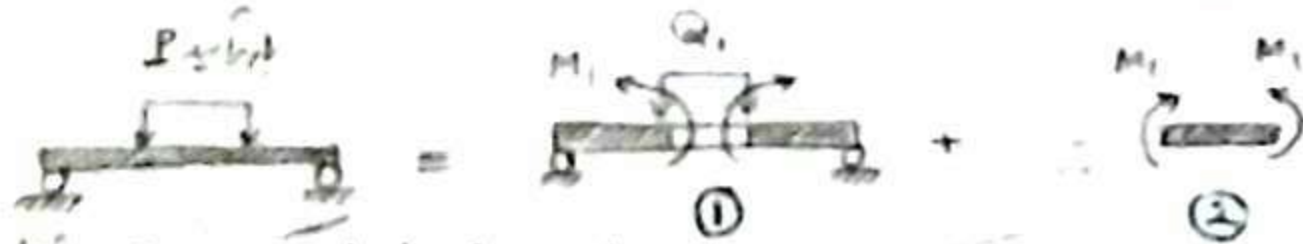
یافتن معادله خمیدگی ورق به روش دیگر امکان پذیر است.

الف) حل مسئله مستقیم معادله حاکم ورق  $\nabla^4 w = \frac{P}{D}$  یا معادله  $Q_r$  (در این حالت نیاز به تقریب ورق به ورق داریم  $0 \leq r \leq b$  و  $a \leq r \leq b$  است که

در ناحیه داخلی  $P$  معادله  $Q_r$  معادله  $P$  معادله  $Q_r = -\frac{P}{2\pi r}$  است.

ب) استفاده از اصل برهم‌نهی (تغییر شعاع)

پایه ورق ② را می‌توان از پاسخ ورق تحت گشتاورهای برابر



$$w = \frac{M_1}{2D(1+\nu)} (b^2 - r^2) \quad b \leq a, M_1 = M_2$$

خمیدگی ورق به روش دیگر به دست آمده است. معادله خمیدگی ورق ② از جمع معادله ① با تغییر شعاع به  $a$  به دست می‌آید.

لکه ورق ② در حالت آزاد است و نگیط ندارد!



مقدار  $M_1$  برابر شرط پویایی شیب در  $r=b$  تعیین می گردد. (شرط پویایی دیگر خود قضیه است که البته دامنه ها می توان آنرا آن استاده کرد و می توان  $\phi$  کامل است.)

در این روش (۲) فوایدی داشت :

چون مقدار  $\mu = 0$  باشد، از معادله (1) است که مشتق  
 ظاهر می گردد!

$$(2) \quad \frac{dw}{dr} \Big|_{r=b} = - \frac{M_1 b}{D(1+\nu)}$$

جای شش ① نیز خواهم داشت :

برای یافتن ① نیز فرض می‌کنیم:

$$\left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=b} = \frac{a^2 b^2 M_1}{D(1-\nu)(a^2 - b^2)} \left( \frac{1}{b} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{b}{a^2} \right) + \frac{Pb}{8\lambda D} \left[ 2 \ln \frac{b}{a} - 1 - \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{2b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a} \right] \rightarrow \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \frac{1+\nu}{1-\nu} \right)$$

از برابر قرارداد این دو عبارت فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$(3) W_{\text{external}} = \frac{P}{8\pi D} \left[ (a^2 - r^2) \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) + (b^2 + r^2) \ln \frac{r}{a} \right]$$

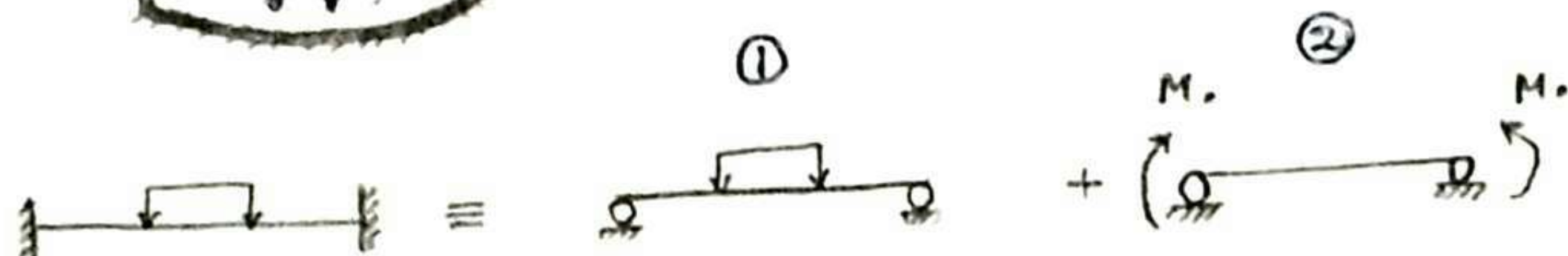
$$(4) w_{\text{internal}} = \frac{P}{8\pi D} \left[ (b^2 + r^2) \ln \frac{b}{a} + (a^2 - b^2) \cdot \frac{(3+\nu)a^2 - (1-\nu)b^2}{2(1+\nu)a^2} \right]$$

مثال: ورق گردن در تحت بار طعنه

جہاں اصل وفاق ⑤ از مجموع آثار وفاق متناہی قبل یا اثر شمار ۴۰

پیدا می گردد. برای یافتن مقدار  $M_0$  از شرط منور بودن شد

در محل تعلیمگاه استادده کیسیم :



$$\left[ \frac{dw_1}{dr} + \frac{dw_2}{dr} \right]_{r=a} = 0$$

$$(2) \leadsto \frac{dw_{\theta}}{dr} \bigg|_{r=a} = - \frac{M_0 a}{D(1+\nu)}$$

$$(3) \rightsquigarrow \frac{dw_{(1)}}{dr} \Big|_{r=a} = \frac{p}{4\pi} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

در نتیجه، پس از جمع آثار خواهم داشت و

$$W_{\text{external}} = \frac{P}{8\pi D} \left[ (a^2 - r^2) \frac{a^2 + b^2}{2a^2} + (b^2 + r^2) \ln \frac{r}{a} \right]$$

$$W_{\text{internal}} = \frac{P}{8\pi D} \left[ (b^2 + r^2) \ln \frac{b}{a} + \frac{(a^2 + r^2)(a^2 - b^2)}{2a^2} \right]$$

مثال: وزن درخت بلبله - شاع  $r = 5$

نہیں وہ حق کہوں، اسے تو ان اربعہ آثار میں سے ہر پاسہ کے صدق و سچا ہوں کیلے یافت۔

طراز این منظوم آثار ناشی از ریاضات علمی مؤثر بر شعاع الفنون b

نمازین، سے نافرمانی قابل توبہ ہے۔ (داخل، دعا و بیرون بارہا ملتا ہے)



(P) ← (مسائل آفریننده قبل) ← (تجربین P در رابطه 3, 4, n, n, dn تغییر می دهد)

$$(4) \rightarrow r^* = 0 : w = \int_0^c dw_{\text{internal}}$$

(3)  $\rightarrow$   $i, c$  :  $w = \int_0^c dw_{\text{external}}$

ex 6c:  $w = \int_{r^*}^{r^*} dw_{\text{external}} + \int_{r^*}^c dw_{\text{internal}}$

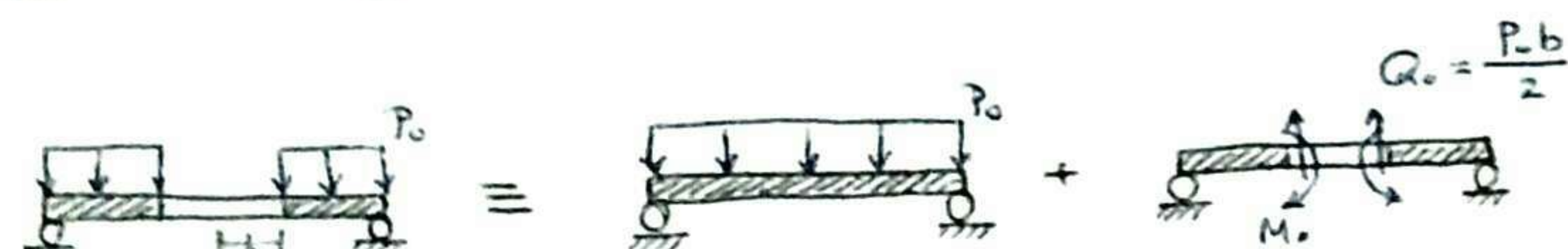
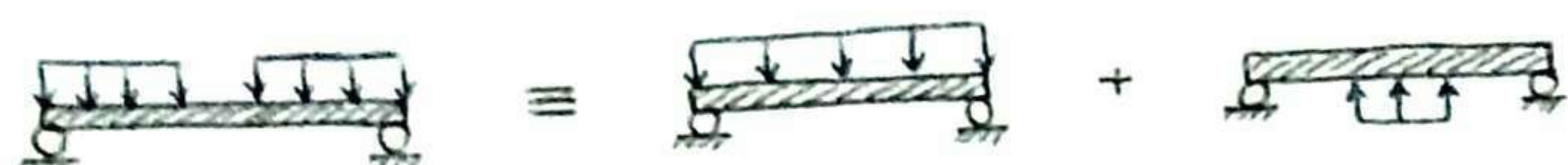
$$r \rightarrow 0 \rightarrow w = \frac{P'}{16\pi D} \left\{ \frac{3+\nu}{1+\nu} (a^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{a} + c^2 \left[ \ln \frac{r}{a} - \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} \cdot \frac{a^2 - r^2}{a^2} \right] \right\}$$

بارشگر

بامیل درون c به سمت صفر می‌دهیم داشته :

$$W = \frac{P'}{16\pi D} \left\{ \frac{3+\nu}{1+\nu} (a^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{a} \right\} \quad ; \quad P' = \frac{\pi c^2 q}{2}$$

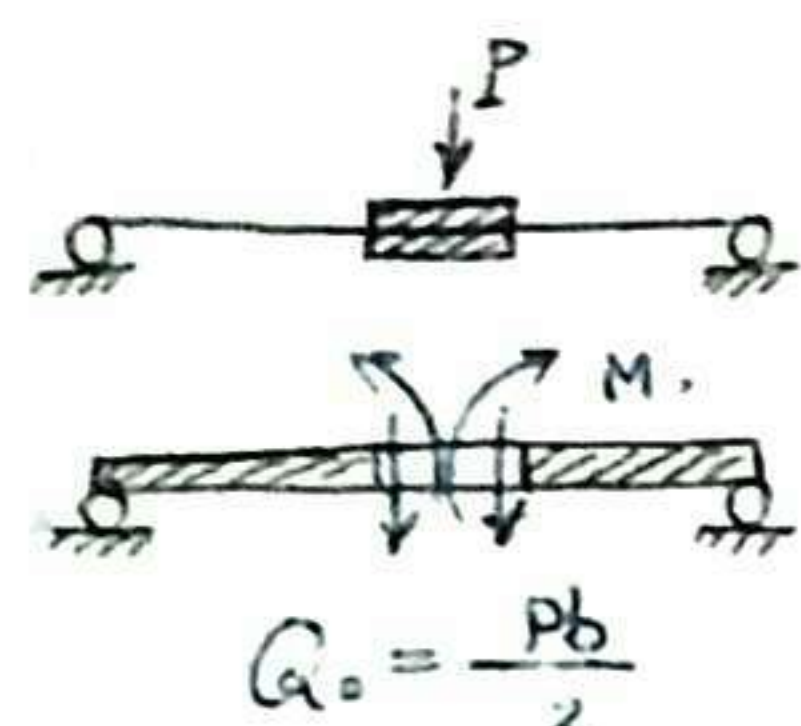




مقدار \$M\_0\$ را می توان از رابطه \$M\_0\$ و یک حرکت بارکنندگی (برای \$l=b\$) یافت:

$$M_0 = \frac{P_0}{16} (3+\nu)(a^2-b^2)$$

مثال: وقت کرد با جسم صلب در یک آن



حل مسئله از طریق جمع آثار را می گیریم. در این حالت مجموع شیب ها را می توان از بارها \$M\_0\$ و \$Q\_0\$ در محل اتصال به خواص صلب بیان باید برابر باشد.

$$M_0 = \frac{P}{4\pi \left[ (1+\nu) \frac{a^2}{b^2} + 1 - \nu \right]} \left[ (1-\nu) \left( \frac{a^2}{b^2} - 1 \right) + 2(1+\nu) \frac{a^2}{b^2} \frac{a}{b} \right]$$

روش انرژی می توان نوشتن معادله زیر:

از بین روش ها می توان از روش استفاده از اصل حداقل انرژی یا اصل کمترین تغییرات (در اینجا معادله) متداول تر است.

الف - اصل انرژی کمترین تغییرات

از بین تغییرات کمترین تغییرات تحت بارها می باشد که گونه زیر بیان می شود:

$$\Pi = U - W \quad (1)$$

که در آن \$U\$ انرژی کشش است و عبارت زیر را می دهد:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_{ij} \cdot \sigma_{ij} \cdot dv = \frac{1}{2} \int_V \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \} dv \quad (2)$$

که در آن \$U\$ و \$W\$ عبارتند از انرژی کشش و انرژی بارها است.

$$W = \int_V \{ T \}^T \{ u \} dv + \{ F_c \}^T \{ u \} - \int_V p \{ u \}^T \{ u \} dv \quad (3)$$

در رابطه با \$\{ T \}\$، \$\{ F\_c \}\$ و \$\{ u \}\$ ترتیب بردارهای تنش، نیرو و جابجایی است.

$$\{ u \}^T = \langle u \quad v \quad w \rangle$$

نیروی کشش و جابجایی می باشد که عبارتند از:

$$\delta \Pi = 0$$

در حالت تعادل (استاتیکی یا دینامیکی) خواهیم داشت که:

بدین ترتیب، با استفاده از اصل کمترین تغییرات می توان نتیجه گرفت که:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dv - \frac{1}{2} \int_A p \cdot w \cdot dxdy \quad (4)$$

در حسب مؤلفه های جابجایی خواهیم داشت:

$$\Pi = \frac{1}{2} D \int_A \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) [w_{,nn} w_{,yy} - (w_{,ny})^2] \right\} dxdy - \frac{1}{2} \int_A p \cdot w \cdot dxdy \quad (5)$$

با توجه به روابط بیان مؤلفه های تنش و کرنش با مؤلفه های انحنا، رابطه (4) به فرم زیر تبدیل می شود:

$$\Pi = \frac{D}{2} \int_A (M_n k_n + M_y k_y + M_{ny} k_{ny}) dA - \frac{1}{2} \int_A p \cdot w \cdot dxdy \quad (6)$$

در این حالت، معادله ها کم به روشی قابل دسترس است:

روش اول، استفاده از روابط اولر - لگرانژ است که می توان از آن استفاده کرد:

$$\Pi = \Pi(w, \dot{w}, \ddot{w}) = \int_A F(w, \dot{w}, \ddot{w}) dA \rightarrow F_{,w} - \frac{\partial}{\partial x} (F_{,w_x}) - \frac{\partial}{\partial y} (F_{,w_y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (F_{,w_{nn}}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (F_{,w_{yy}}) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (F_{,w_{ny}}) - \dots = 0$$

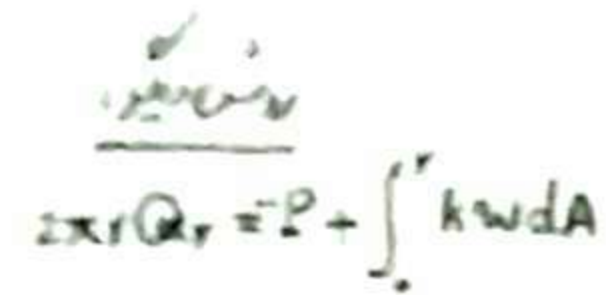
روش دوم، روش Ritz است. یا انتخاب پاسخ تقریبی:

$$w = \alpha_1 \varphi_1(x,y) + \alpha_2 \varphi_2(x,y) + \dots$$

$$\Pi = \Pi(\alpha_1, \alpha_2, \dots) \Rightarrow \delta \Pi = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = 0 \quad i=1, \dots, n$$



شمال: عرض ۳۵ درجہ و طول ۷۵ درجہ ۱۵



در تحلیل موقت فوق استفاده از رابطه  $\sigma_{\text{w}} = \frac{P}{D}$ ,  $p = kw$ ,  $k = \frac{E}{L}$ .  
توضیح دستاورد حل، در این معادله (استفاده از روش انرژی) را می توانیم

۱۱. نوروزی کز شمس و قمر ۱۲ نوروزی بجا نیل ناس از کجای کبیر فدا نیل لاسک است.

بالتعاقب پاسخ نویسی زیر خود احیم دانست :

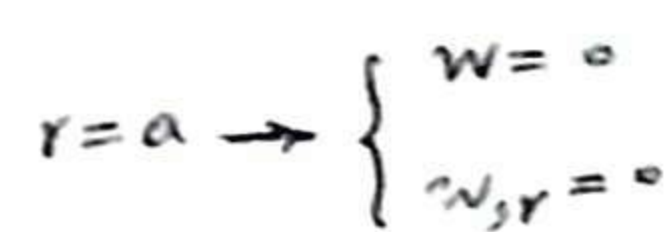
کوارنٹری خاص فیڈر ازمسٹ:

بنام ابرار خواهم داشت :

$$\delta \pi = 0 \rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial c_0} = 0, \frac{\partial \pi}{\partial c_1} = 0$$

$$C_2 = \frac{P}{\pi k a^2 \left[ \frac{1}{6} + 16D(1+\nu)/ka^2 \right]}$$

شمال : در گردنکت مشرقید استاتیک



شرطی ہو :

مقالہ نمبر حسب ۲، ۵ :

$$P = P_0 + P_1 \frac{r}{a} \cos \theta$$

$$p^4 w = \frac{P}{D}, \quad w = w_h + w_p$$

1000

پانچ فوٹوں کے نقطہ باواسطہ  $r$  دیتے ہیں!  $\omega = (AP_0 r^4 + BP_1 r^5 \cos \theta) / D$

$$w_h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f_n \cos(n\theta) + f_n^* \sin(n\theta)]$$

باتوجه به تساوی:  $w(\theta) = w(-\theta)$

در نتیجه  $f_n^*$  معلوم شود. از روی یک مقدار  $w$  در  $r=0$  باید تعیین باشد (معمولاً ضرایب عبارات  $D, C$  در  $f_n$ ).

$$w_h = A_2 + B_2 r^2 + (A_1 r + B_1 r^3) \cos \theta$$

باتوجه به اینکه پاسخ مفصلی درمورد داد و ستد عسری را مشاهده می نمودیم

با اعمال شرایط مرزی در  $r=a$  خواصم داشت:

$$\frac{P_0 a^4}{64D} + A_0 + B_0 a^2 + \left( \frac{P_1 a^4}{192D} + A_1 a + B_1 a^3 \right) \cos \theta = 0$$

$$\frac{4P_1 a^3}{64D} + 2B_1 a + \left( \frac{5P_1 a^3}{192D} + A_1 + 3B_1 a^2 \right) \cos \theta = 0$$

$$\textcircled{*} U_1 = \frac{D}{2} \int_A \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] r dr d\theta$$