



$$\sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{t} \pm \frac{12 M_{ij} z}{t^3}$$

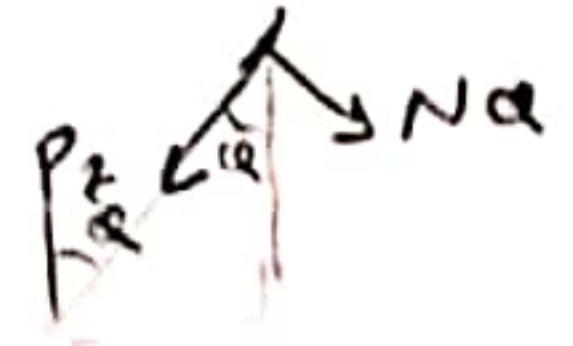
$$\sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{t}$$

مثال: تنشهای حاصل از نیروی وزن خود را پیدا کرده در یک سقف کروی مانند شکل را بیابید.
با توجه به اینکه پوسته مورد بررسی دارای شرایط لازم برای تشکیل تنشهای کششی است در نتیجه:

باز فرض آنکه نیروی وزن بر واحد سطح δ باشد، خواهیم داشت:

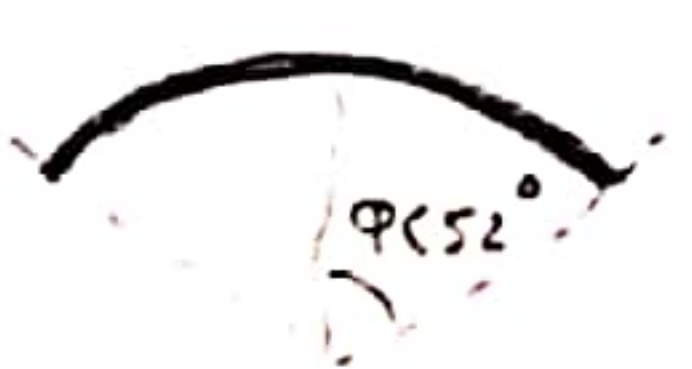
برای یکسان شدن: $dF = (2\pi r_0 \cdot \alpha d\varphi) \delta = 2\pi a^2 \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot \delta$

$$\rightarrow F = \int dF = 2\pi a^2 \delta (1 - \cos\varphi)$$

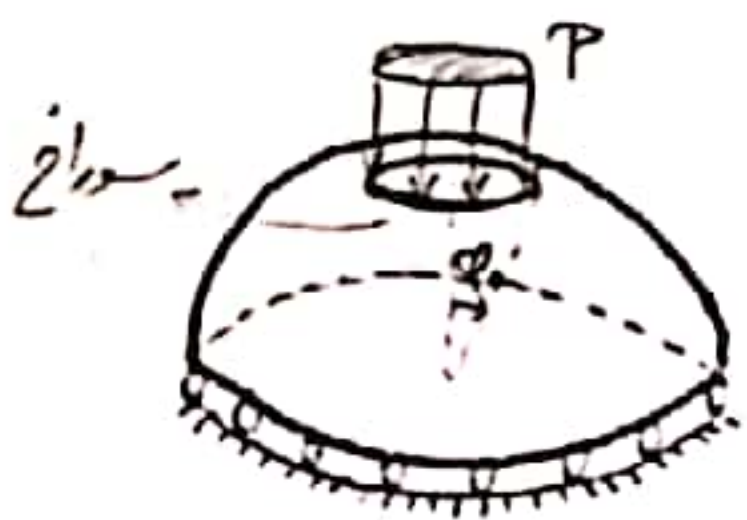


عبارت معنی است! $N_\varphi = - \frac{F}{2\pi r_0 \sin\varphi} = - \frac{2\pi a^2 \delta (1 - \cos\varphi)}{2\pi a \sin^2\varphi} = - \frac{\delta a}{1 + \cos\varphi} \rightarrow$

برای $r_1 = r_2 = a \rightarrow \frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} + P_2 = 0 \Rightarrow \frac{N_\varphi}{a} + \frac{N_\theta}{a} = -\delta \cos\varphi \rightarrow N_\theta = \delta a \left(\frac{1}{1 + \cos\varphi} - \cos\varphi \right)$



برای زاویه ای کوچک معنی است و بعد از δr معنی مثبت می گردد. به علاوه برای این که نمی تواند تنش کششی را تحمل کند، بعد از زاویه δr معنی منفی می خورد.

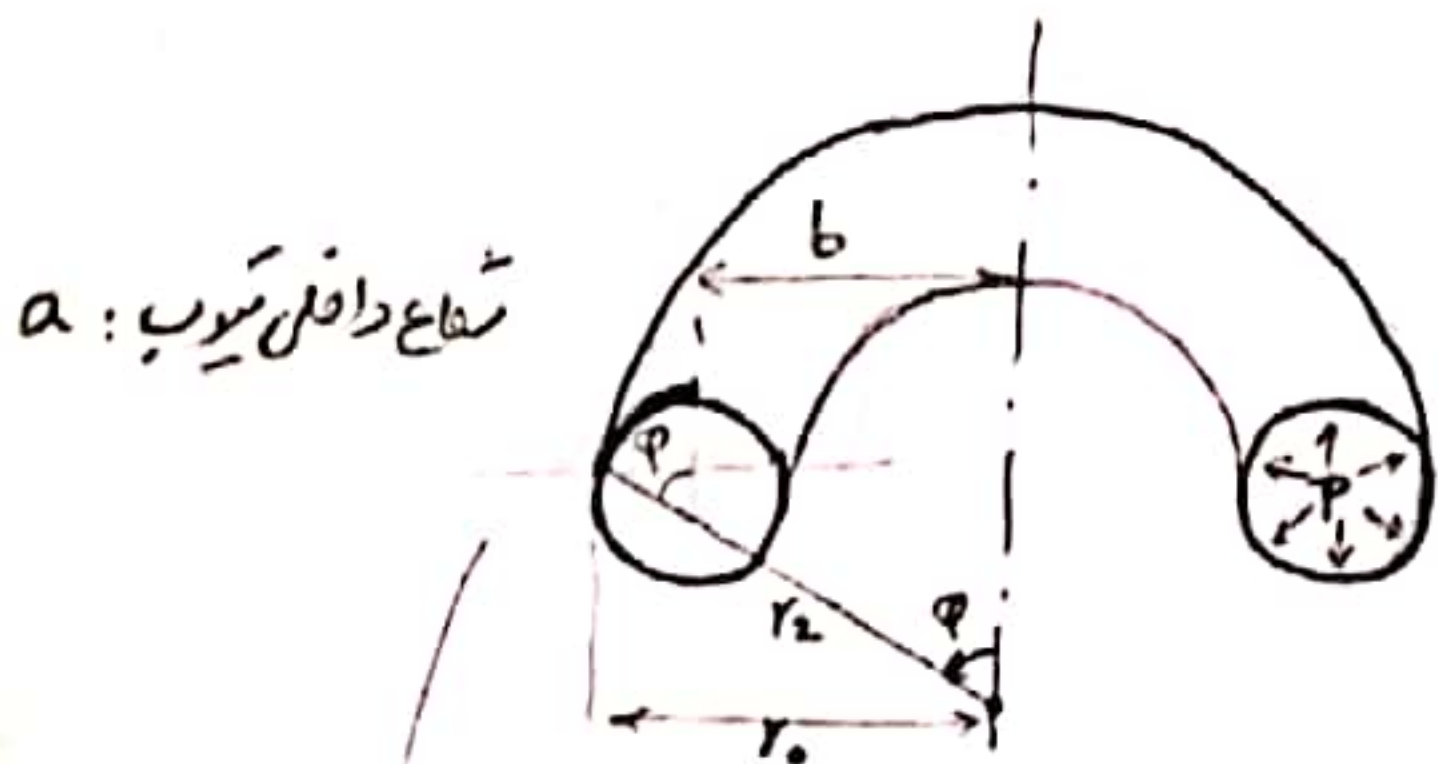


مثال: اگر پوسته کروی علاوه بر وزن، نیروی لوله ای به شدت P تحمل کند، تنش حاصل را بیابید.

$$F = 2\pi a^2 \delta \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin\varphi d\varphi + 2\pi a \sin\varphi \cdot P$$

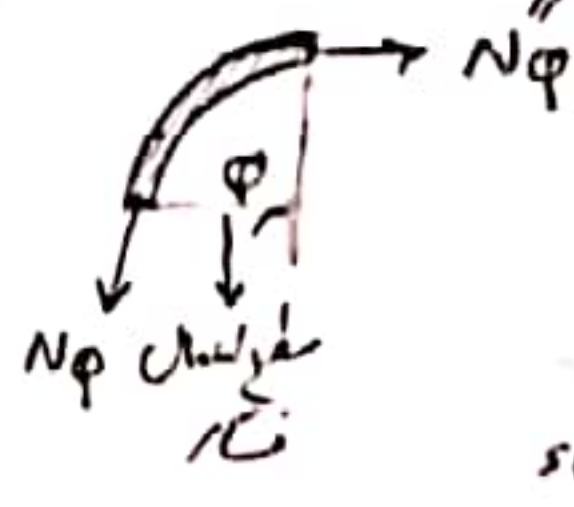
$$\rightarrow N_\varphi = -\delta a \frac{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}{\sin^2\varphi} - P \frac{\sin\varphi_0}{\sin^2\varphi}, \quad N_\theta = \delta a \left(\frac{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}{\sin^2\varphi} - \cos\varphi \right) + P \frac{\sin\varphi_0}{\sin^2\varphi}$$

مثال: نیروهای پیدا شده در یک تیوب



$$r_0 = r_2 \sin\varphi$$

$$\frac{r_0}{r_2} = \sin\varphi$$



برای آنکه ارتباط مناسب میان جابجایی نیروی قائم و وتر برضه حاصل گردد، از سطح حاصل خود را استفاده می کنیم. برای این نیروی قائم و وتر این جابجایی عبارتند از:

$$F = \pi(r_0^2 - b^2)P$$

عبارتند از:

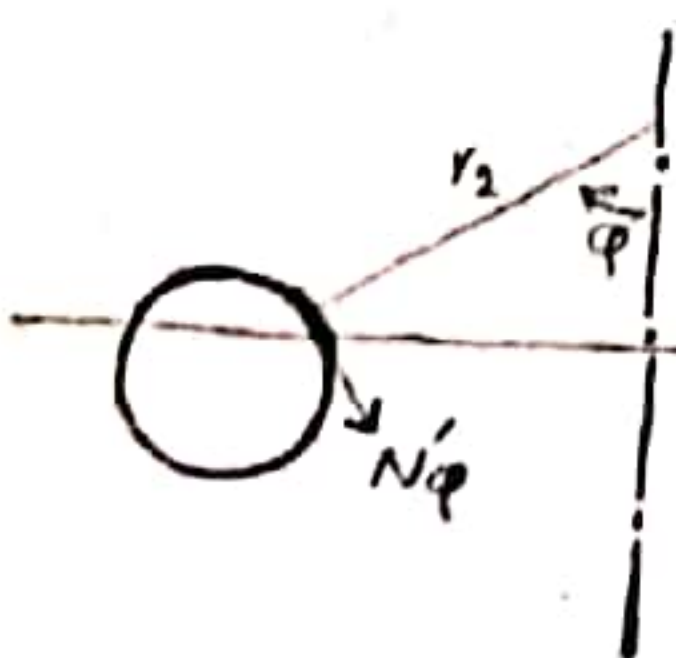
$$\rightarrow N_\varphi = \frac{\pi(r_0^2 - b^2)P}{2\pi r_0 \sin\varphi} = \frac{P(r_0^2 - b^2)}{2r_0 \sin\varphi}$$

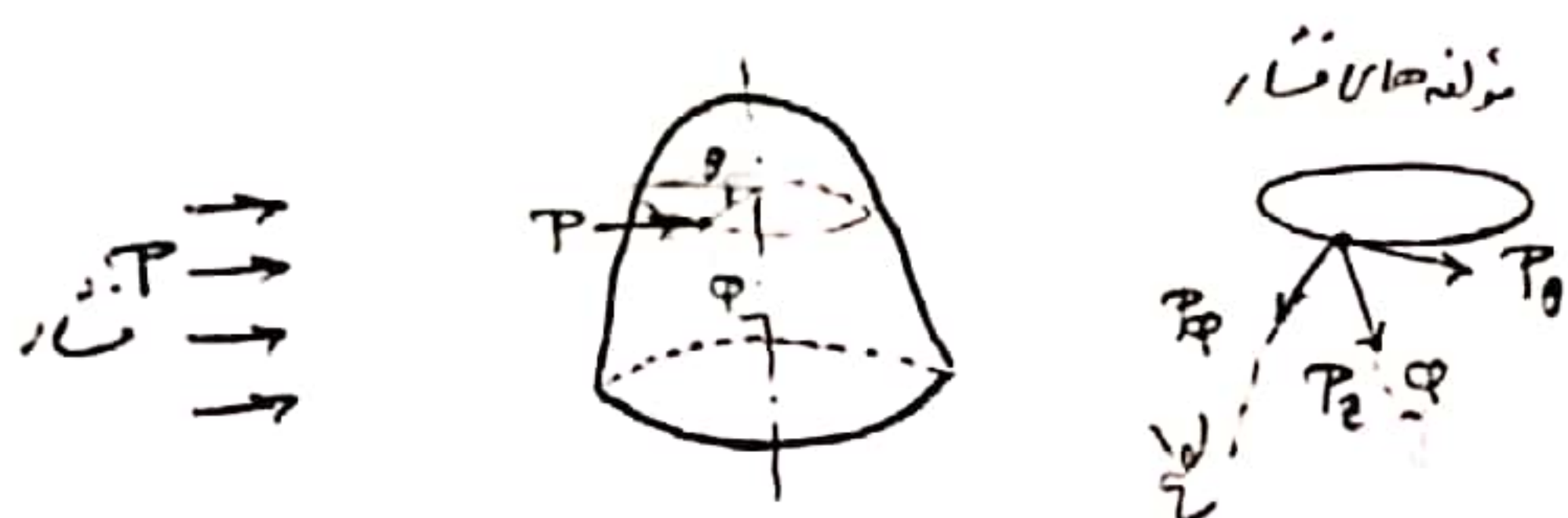
$$\begin{cases} r_1 = a \\ r_2 = \frac{r_0}{\sin\varphi} \end{cases}$$

$$\sin\varphi = \frac{r_0 - b}{a} \Rightarrow N_\varphi = \frac{Pa(r_0 + b)}{2r_0}, \quad N_\theta = r_2 \left[\frac{-N_\varphi}{a} + P \right] = \frac{Pa}{2}$$

تنش ایجاد شده برای همه φ ها، θ ها برابر است و همه ذرات تیوب تنش کششی معینی را دارند.

به سادگی می توان ثابت نمود: $N_\varphi = N'_\varphi$





برای یافتن مؤلفه‌های N_{θ} ، N_{ϕ} و $N_{\theta\phi}$ از مؤلفه‌های اساسی نیروی بارده
از سوی جریان باد چشم پوشی می‌کنیم. برای این اساس:
 $P_{\phi} = P_{\theta} = 0$

$$P_z = P \cos \theta \cdot \sin \phi$$

درنتیجه روابط تعادل بدین‌ترمز خواهد بود: (آزادی رابطه معنی ۱۳)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \phi} (N_{\phi} r_0) + r_1 N_{\theta\phi, \theta} - N_{\theta} r_1 \cos \phi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \phi} (N_{\theta\phi} r_0) + r_1 N_{\theta, \theta} + N_{\theta\phi} r_1 \cos \phi = 0 \\ \frac{N_{\phi}}{r_1} + \frac{N_{\theta}}{r_2} + P \sin \phi \cos \theta = 0 \end{cases}$$

از رابطه سوم استفاده کرده و معادله رابطه دیگر را در معادله دوم جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{cases} N_{\phi, \phi} + \left(\frac{1}{r_0} r_{0, \phi} + \cot \phi \right) N_{\phi} + \frac{r_1}{r_0} N_{\theta\phi, \theta} = -P r_1 \cos \phi \cos \theta \\ N_{\theta\phi, \phi} + \left(\frac{1}{r_0} r_{0, \phi} + \frac{r_1}{r_2} \cot \phi \right) N_{\theta\phi} - \frac{1}{\sin \phi} N_{\phi, \theta} = -P r_1 \sin \theta \end{cases}$$

حل رابطه بالا تنها به‌وسیله عدد امکان پذیر است.

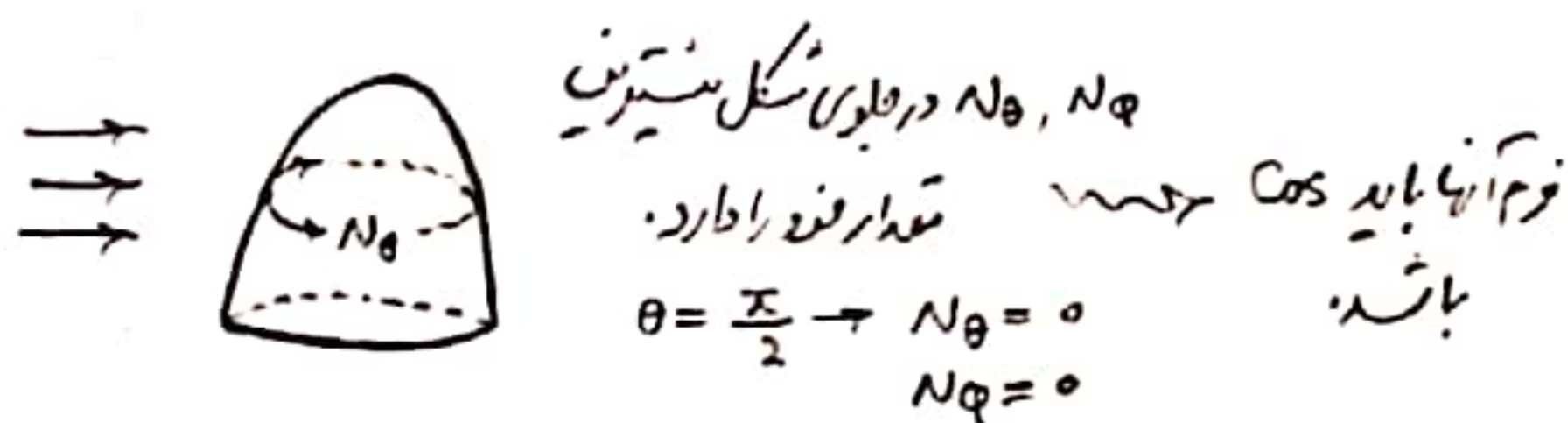
حالت خاص: پوسته کروی $r_1 = r_2 = a$

پایه رابطه گونه زیر اختیار می‌کنیم:

با توجه به طرف سمت راست رابطه بالا انتخاب شده اند.
S ها توانایی از phi هستند.

$$N_{\phi} = S_{\phi} \cos \theta, \quad N_{\theta\phi} = S_{\theta\phi} \cdot \sin \theta$$

$$r_0 = r_2 \sin \phi = a \sin \phi$$



N_{θ} ، N_{ϕ} در طولی شکل بهترین
نرم آنها باید $\cos$ مقدار منفی را دارد.
باشد.
 $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow N_{\theta} = 0$
 $N_{\phi} = 0$

$$\begin{cases} \frac{dS_{\phi}}{d\phi} + 2S_{\phi} \cot \phi + \frac{S_{\theta\phi}}{\sin \phi} = -P a \cos \phi \\ \frac{dS_{\theta\phi}}{d\phi} + 2S_{\theta\phi} \cot \phi + \frac{S_{\phi}}{\sin \phi} = -P a \end{cases}$$

اگر تغییر متغیر را استفاده کنیم، آنگاه خواهیم داشت:

به‌عنوان + و - کردن معادلات علامت $\rightarrow$
 $U_1 = S_{\phi} + S_{\theta\phi}, \quad U_2 = S_{\phi} - S_{\theta\phi}$

$$\begin{cases} \frac{dU_1}{d\phi} + \left(2 \cot \phi + \frac{1}{\sin \phi} \right) U_1 = -P a (1 + \cos \phi) \\ \frac{dU_2}{d\phi} + \left(2 \cot \phi - \frac{1}{\sin \phi} \right) U_2 = P a (1 - \cos \phi) \end{cases}$$

که در معادله دینو نیل متغیر می‌باشند و جواب بدین‌ترمز:

$$U_1 = \frac{1 + \cos \phi}{\sin^3 \phi} \left[c_1 + P a \left(\cos \phi - \frac{1}{3} \cos^3 \phi \right) \right]$$

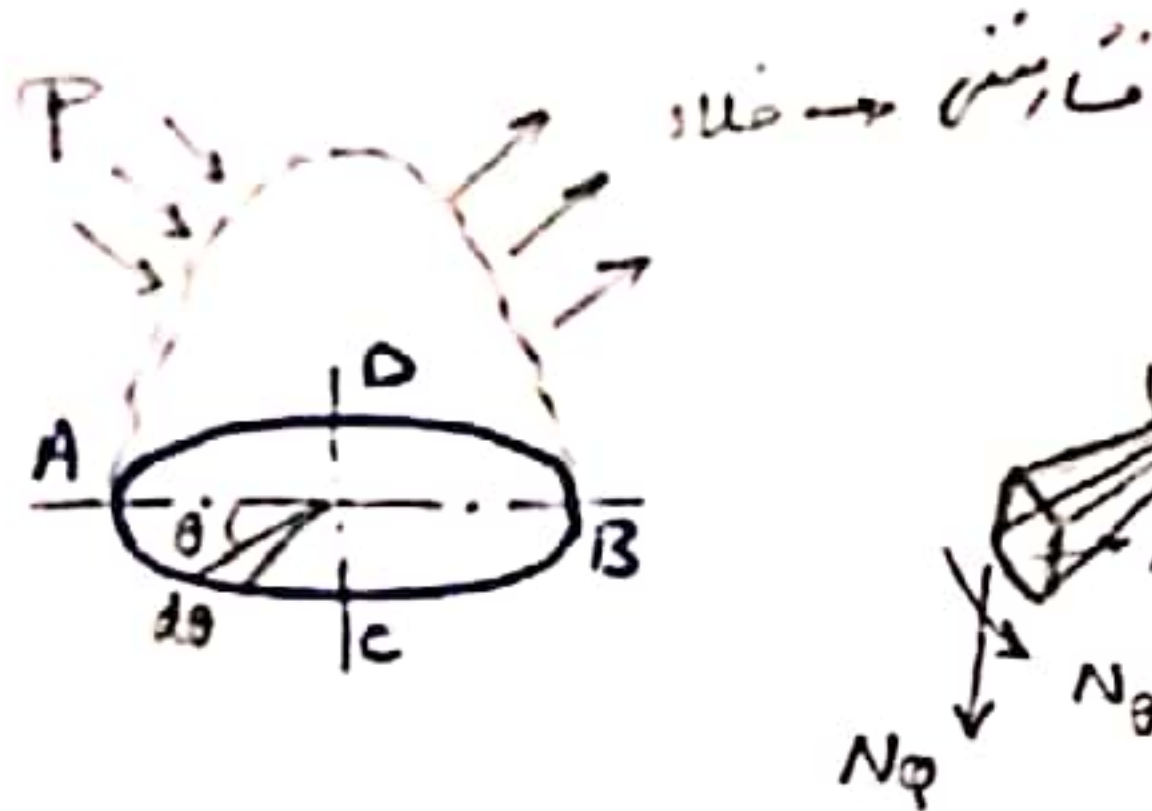
$$U_2 = \frac{1 - \cos \phi}{\sin^3 \phi} \left[c_2 - P a \left(\cos \phi - \frac{1}{3} \cos^3 \phi \right) \right]$$

برای آنکه اعمال شرایط مرزی امکان پذیر نیست. باید U_1 و U_2 را به S_{ϕ} و $S_{\theta\phi}$ و نه N_{ϕ} و $N_{\theta\phi}$ برگردانیم. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$N_{\phi} = \frac{\cos \theta}{\sin^3 \phi} \left[\frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{c_1 - c_2}{2} \cos \phi + P a \left(\cos \phi - \frac{1}{3} \cos^3 \phi \right) \right]$$

$$N_{\theta\phi} = \frac{\sin \theta}{\sin^3 \phi} \left[\frac{c_1 - c_2}{2} + \frac{c_1 + c_2}{2} \cos \phi + P a \left(\cos \phi - \frac{1}{3} \cos^3 \phi \right) \right]$$

شرایط مرزی را در صفحه افقی پوسته برقرار می‌کنیم: $(\varphi = \frac{\pi}{2})$



$$\begin{cases} N_{\varphi} = \frac{c_1 + c_2}{2} \cos \theta \\ N_{\theta\varphi} = \frac{c_1 - c_2}{2} \sin \theta \end{cases}$$

BC: $\begin{cases} \sum F_{AB} = 0 & \text{بخش عمودیت جسم در جهت بار} \rightarrow \int_0^{2\pi} N_{\theta\varphi} \cdot a d\theta \cdot \sin \theta = - \int_{\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} P \sin \varphi \cos \theta \cdot (\sin \varphi \cos \theta) \cdot a^2 \sin \varphi d\varphi d\theta \\ \sum M_{CD} = 0 & \text{بخش عمودیت برش جسم در جهت بار} \rightarrow \int_0^{2\pi} N_{\theta\varphi} \cdot a d\theta \cdot a \cos \theta = 0 \end{cases}$ (فشارها از مرکز نمی‌گذرند.)



$$\Rightarrow c_1 = -\frac{2}{3} Pa, \quad c_2 = \frac{2}{3} Pa$$

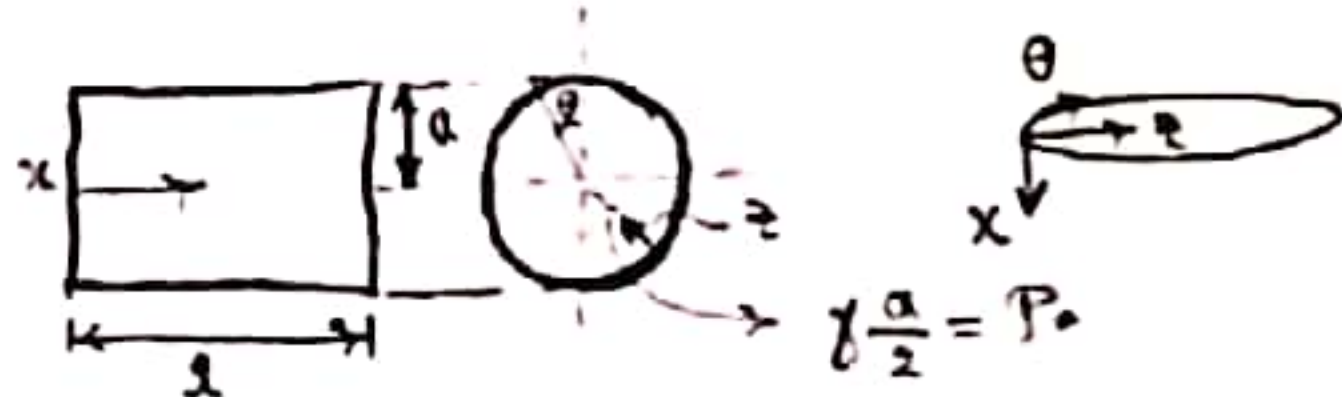
$$\rightarrow N_{\varphi} = -\frac{Pa}{3} \cdot \frac{\cos \theta \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} (2 - 3 \cos \varphi + \cos^3 \varphi), \quad N_{\theta} = \frac{Pa}{3} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^3 \varphi} (2 \cos \varphi - 3 \sin^2 \varphi - 2 \cos^3 \varphi)$$

$$N_{\theta\varphi} = -\frac{Pa}{3} \cdot \frac{\sin \theta}{\sin^3 \varphi} (2 - 3 \cos \varphi + \cos^3 \varphi)$$

در $\varphi = \frac{\pi}{2}$ مقدار $N_{\theta\varphi}$ منفرد است که این نقطه در مورد کره کامل درست است.
 به نقاط A, B

مثال: تغییرات مؤلفه‌های N در مخزن پُر از مایع

از روابط کلی پوسته متقارن (با گرداندن نامتقارن) خواصیم داشت:



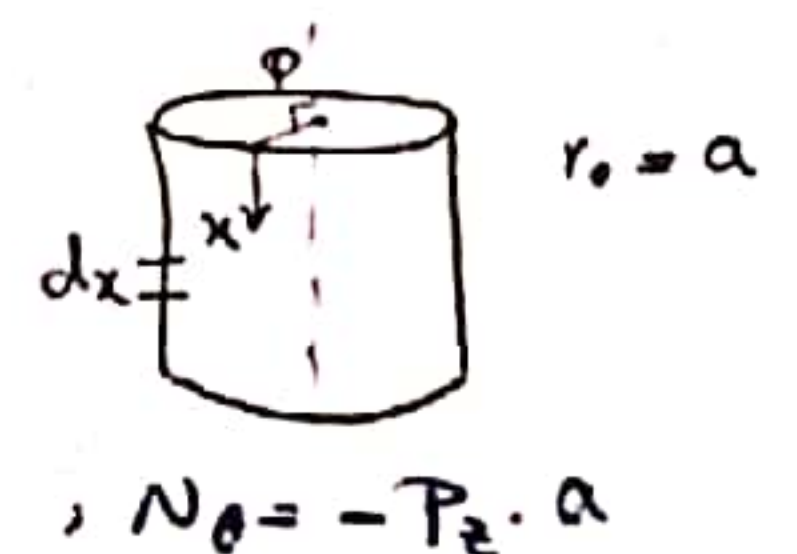
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_{\varphi}) + r_1 N_{\theta\varphi, \theta} - r_1 N_{\theta} \cos \varphi + r_0 r_1 P_{\varphi} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_{\theta\varphi}) + r_1 N_{\theta, \theta} + r_1 N_{\theta\varphi} \cos \varphi + r_0 r_1 P_{\theta} = 0 \end{cases}$$

برای پوسته استوانه‌ای خواصیم داشت:

(با کمین زیرین φ با x و φ ثابت و برابر با $\frac{\pi}{2}$ است و تغییراتی ندارد. در همین r_1 به نایب است و در نتیجه رابطه اول بصورت $\omega = 0$ در می‌آید که ایراد دارد.)

$$\frac{1}{r_1} \times \text{رابطه اول} \rightarrow \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_{\varphi}) + N_{\theta\varphi, \theta} - N_{\theta} \cos \varphi + r_0 P_{\varphi} = 0$$

$$* dx = r_1 d\varphi \rightarrow \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow N_{\varphi, x} + \frac{1}{a} N_{\theta\varphi, \theta} = -P_{\varphi}, \quad N_{\theta\varphi, x} + \frac{1}{a} N_{\theta, \theta} = -P_{\theta}$$



$$N_{\theta} = -P_{\theta} a$$

برای مسئله کنونی $P_{\varphi}, P_{\theta} = 0$ می‌باشد و اگر فشار در مرکز استوانه P_0 باشد آن‌گاه خواصیم داشت:

$$P_{\varphi} = -P_0 + \gamma a \cos \theta$$

$$\Rightarrow N_{\theta} = (P_0 - \gamma a \cos \theta) a \rightarrow N_{\theta\varphi} = -\gamma a x \sin \theta + c_1(\theta) \rightarrow N_{\varphi} = \gamma \frac{x^2}{2} \cos \theta - \frac{x}{a} \frac{dc_1}{d\theta} + c_2(\theta)$$

اگر تکیه‌گاه‌ها را در انتهای پوسته ساده باشند آن‌گاه:

$$x = 0, l \rightarrow N_{\varphi} = 0 \rightarrow \begin{cases} c_2(\theta) = 0 \\ c_1(\theta) = \frac{\gamma a l}{2} \sin \theta + C \end{cases}$$

اگر دو انتها در معرض بیضی قرار نداشته باشند مقدار C مشخص است. ($N_{\theta\varphi}$ باید منفرد باشد چرا که فشار خارج و عمود ندارد.)

اگر تکیه‌گاه‌ها معانات باشند آن‌گاه: (در درپوشش مطلب) اگر عبارت c_1 مانند قبل فرض شود:

$$\delta l = \int_0^l \epsilon_x dx = 0 \quad * \epsilon_x = \frac{1}{E t} (N_{\varphi} - \nu N_{\theta}) = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\rightarrow \int_0^l (N_{\varphi} - \nu N_{\theta}) dx = 0 \rightarrow c_2(\theta) = \nu P_0 a + \left(\frac{l^2}{12} - \nu a^2 \right) \gamma \cos \theta$$

در رابطه با این روش شرط مرز صاف است و این صورت برای محاسبه مناسب است.

$P_0 = \frac{\gamma a}{2}$ (در مقطع میان استوانه قرار دارد)

$$\begin{cases} N_\theta = \gamma a^2 (1 - \cos \theta) \\ N_{x\theta} = -\gamma a \sin \theta \\ N_x = -\frac{\gamma}{8} (l^2 - 4x^2) \cos \theta \end{cases}$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_\theta) = \frac{1}{E t} (N_x - \nu N_\theta) \rightarrow \epsilon_x = u_{,x} \rightarrow u = \frac{1}{E t} \int_{-l/2}^{l/2} (N_x - \nu N_\theta) dx$$

در ابتدا در شرط مرز باید ثابت عدم تغییر پهنایی و در نتیجه $u_\theta = 0$ در $x = \pm \frac{l}{2}$ (در این صورت برای محاسبه مناسب است).

II $u_{,x} = \epsilon_x$

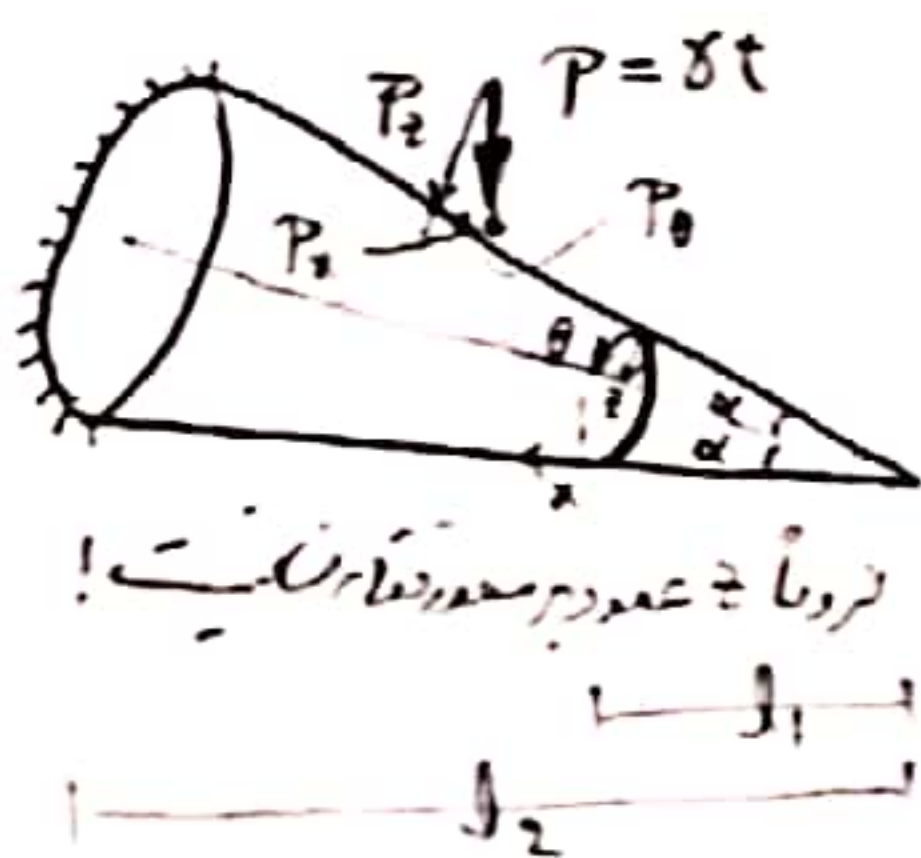
$$\rightarrow E t u = -\nu \gamma a^2 x + \gamma x \cos \theta \left(\frac{4x^2 - 3l^2}{24} + \nu a^2 \right)$$

$$E t v = \frac{\gamma}{8} (l^2 - 4x^2) \sin \theta \left[(2 + \nu) a + \frac{5l^2 - 4x^2}{48a} \right] \leftarrow \delta_{x\theta} = u_{,\theta} + v_{,x} = \frac{T x t}{G} \quad \text{III}$$

$$E t w = \gamma a^3 (1 - \cos \theta) - \frac{\alpha}{8} (l^2 - 4x^2) \gamma \cos \theta (2 + \nu) - \frac{\gamma}{8} \cos \theta \left(\frac{5l^2 - 4x^2}{48a} - \nu a \right) (l^2 - 4x^2)$$

III $\epsilon_\theta = \frac{1}{E t} (N_\theta - \nu N_x) = \frac{1}{\alpha} (v_{,\theta} - w)$, $\epsilon_z = w_{,z} = 0$

شکل تغییر N ای باشد و در نتیجه مخروطی تحت وزن خود (مخروط ناقص)



$$\begin{cases} P_x = -\gamma t \sin \alpha \cdot \cos \theta \\ P_\theta = \gamma t \cdot \sin \theta \\ P_z = \gamma t \cos \alpha \cdot \cos \theta \end{cases}$$

در اینجا استفاده از روابط غشایی بر روی مخروطی موازی داشتیم.

$$\begin{cases} N_\theta = -P_z \cdot x \tan \alpha \\ N_{x\theta} = \frac{1}{x^2} \left[f_1(\theta) - \int \left(P_\theta - \frac{1}{\cos \alpha} P_{z,\theta} \right) x^2 dx \right] \\ N_x = \frac{1}{x} \left[f_2(\theta) - \int \left(\frac{1}{x \sin \alpha} N_{x\theta,\theta} + P_z \tan \alpha + P_x \right) x dx \right] \end{cases}$$

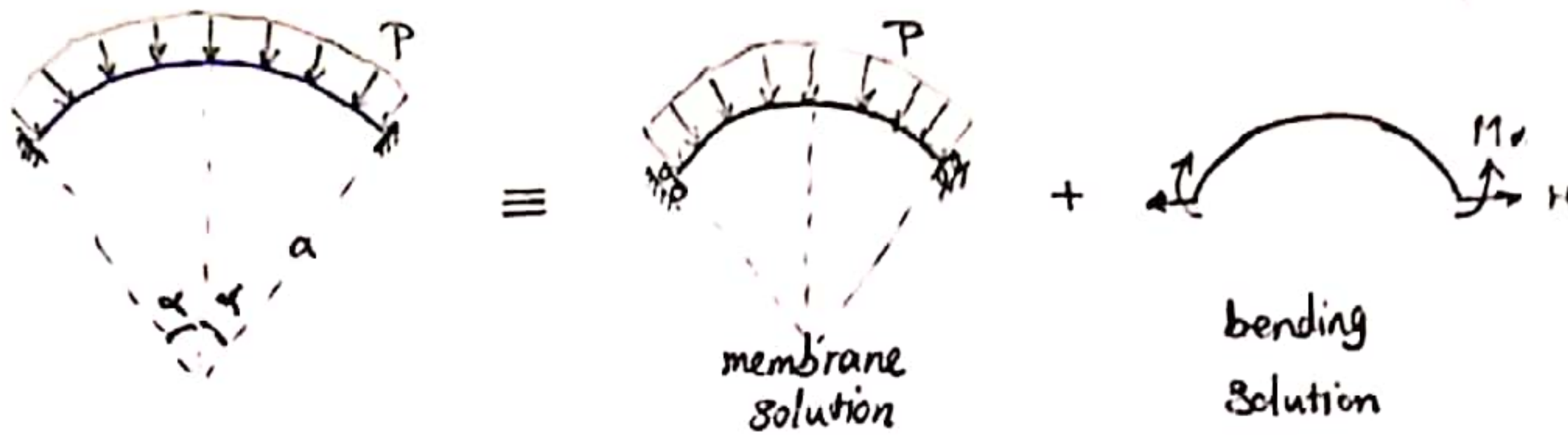
در اینجا با استفاده از روابط غشایی بر روی مخروطی موازی داشتیم. در اینجا با استفاده از روابط غشایی بر روی مخروطی موازی داشتیم.

$$\begin{cases} N_\theta = -\gamma t x \sin \alpha \cos \theta \\ N_{x\theta} = \frac{1}{x^2} \left[f_1(\theta) - \frac{2x^3}{3} \gamma t \sin \theta \right] \\ N_x = \frac{1}{x} \left[f_2(\theta) + \frac{1}{x \sin \alpha} f_1(\theta)_{,\theta} + \frac{\gamma t x^2}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \alpha \right) \right] \end{cases}$$

$x = l_2 \rightarrow N_x = 0, N_{x\theta} = 0$

$$\rightarrow f_1(\theta) = \frac{2l_2^3}{3} \gamma t \sin \theta, \quad f_2(\theta) = -\frac{\gamma t l_2^2}{\sin \alpha} \cos \theta (1 - \sin^2 \alpha)$$

مثال: دانه‌های تکیه‌گاه‌های مقطع کروی زیر بار یکنواخت تقریباً لول کرده می‌شوند.



این‌ها متن درجه‌های H و M از شرط سینمایی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\delta_{\psi} \big|_{\psi=0} = \delta_{\text{membrane}} + \delta_{\text{bending}} = 0$$

$$V_{\psi} \big|_{\psi=0} = V_{\text{membrane}} + V_{\text{bending}} = 0$$

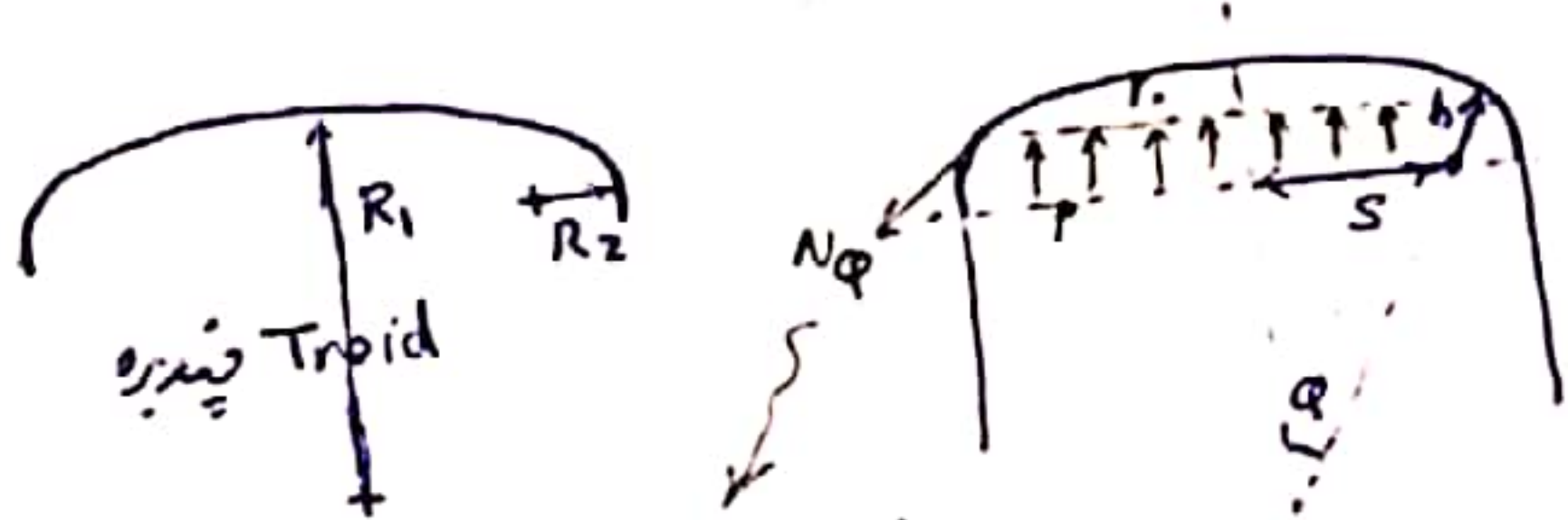
در سطح این خاص اجزاء به موازات هم منعطف می‌گردند، در نتیجه V وجود ندارد.

$$\delta_m = r_0 \epsilon_\theta = \frac{r_0}{Et} (N_\theta - V N_\varphi) = \frac{-Pa^2(1-\nu)}{2Et} \sin \alpha \quad r_0 = a \sin \alpha, \quad N_\theta = N_\varphi = \frac{-Pa}{2} \leftarrow \sigma_\varphi = \sigma_\theta \quad \frac{1}{2} N_\varphi = N_\theta \quad \text{در کره}$$

$$\begin{cases} \delta = 0 \Rightarrow \frac{2\lambda^2 \sin \alpha}{Et} M_\alpha + \frac{2a\lambda \sin^2 \alpha H}{Et} - \frac{Pa^2(1-\nu)}{2Et} \sin \alpha = 0 \\ V = 0 \Rightarrow \frac{-4\lambda^3 M_\alpha}{Et} - \frac{2\lambda^2 \sin \alpha H}{Et} = 0 \end{cases}$$

تغییر H و M از دو معادله بالا بدست می‌آیند.

مثال: مخزن تحت بار با کنگری فیدره با ضخامت h



$$\begin{aligned} r_0 &= s + b \sin \varphi \\ r_1 &= b \\ r_2 &= b + \frac{s}{\sin \varphi} \end{aligned}$$

از تعادل نیروها در جهت قائم خواصیم داشت: (طول غشایی)

$$2\pi r_0 N_\varphi \sin \varphi = \pi r_0^2 P \Rightarrow N_\varphi = \frac{Pr_0}{2 \sin \varphi} = \frac{P}{2} \cdot \frac{s + b \sin \varphi}{\sin \varphi}$$

$$\frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} = -P_2 = P \Rightarrow N_\theta = P \left(\frac{b \sin \varphi + s}{\sin \varphi} \right) \left(1 - \frac{s + b \sin \varphi}{2b \sin \varphi} \right)$$

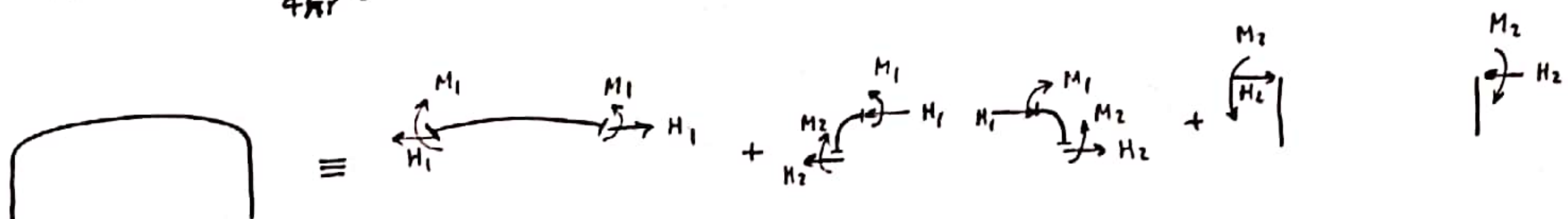
(در اصل باید $\delta_m + \delta_b$ مادی هم وارد شود!)

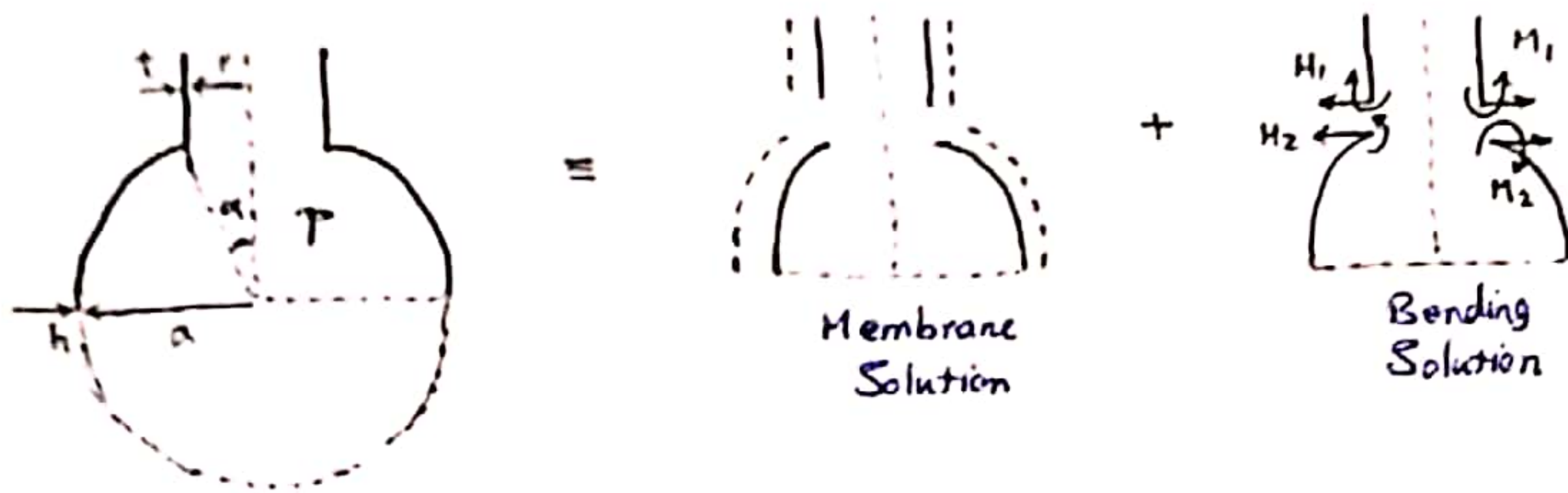
$$\delta_{mc} = \left[\frac{Pr^2}{2Et} (2-\nu) \right]$$

$$\delta_{mt} = r_0 \epsilon_\theta = \frac{Pr^2}{2Et} \left(2 - \frac{r}{b} - \nu \right)$$

و از طرف دیگر دایره تغییر مکان انتزاعی شکل کنگری فیدره با برشته استوانه‌ای خواصیم داشت:

$$M=0, \quad Q = \frac{Et^{3/2}}{4hr^{3/2}} (\delta_{mc} - \delta_{mt}) \quad \leftarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$





انرژی الاستوانه باز $N_x = 0$
 کلاً و نه در مرکز؟! $\downarrow$

فرض می‌کنیم انرژی تحین الاستوانه از سه من باشد

شرط‌های لازم برای تحین مقادیر H_1, H_2, M_1, M_2 عبارتند از:

$$(I) \quad (\delta_t)_c = (\delta_t)_s, \quad (V_t)_c = (V_t)_s \rightarrow (V_b)_c = (V_b)_s$$

برای پوسته نازک: $\sigma_\theta = \frac{P_a}{2h}, \quad \sigma_\varphi = \frac{P_a}{2h}$

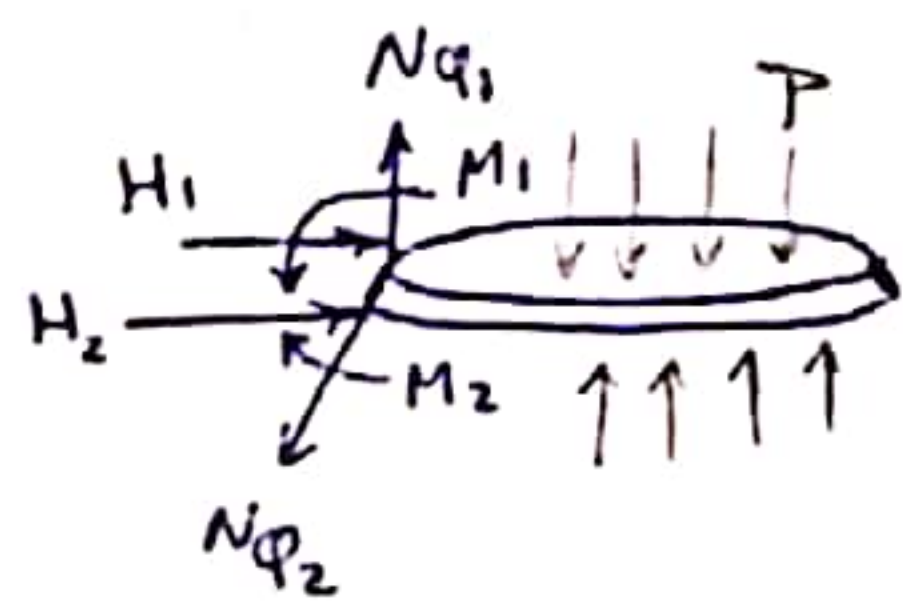
برای پوسته الاستوانه‌ای: $\sigma_\theta = \frac{P_r}{t}, \quad \sigma_\varphi = \frac{P_r}{2t}$

$$\Rightarrow \delta_{mc} = \frac{P_r^2}{2Et} (2-\nu), \quad \delta_{ms} = \frac{P_a r}{2Eh} (1-\nu)$$

در شرط دیگر، از طریق رابطه تعادل نوس می‌گیرند (به فرم I)

$$(I) \quad \delta_{mc} + \frac{2\lambda_c}{k} H_1 + \frac{2\lambda_c^2}{k} M_1 = \delta_{ms} + \frac{2a\lambda_s \sin \alpha}{Eh} H_2 + \frac{2\lambda_s^2 \sin \alpha}{Eh} M_2 \quad (1), \quad k = \frac{Et}{r^2}$$

$$-\frac{\lambda_c^2}{k} H_1 - \frac{4\lambda_c^3}{k} M_1 = \frac{2\lambda_s^2 \sin \alpha}{Eh} H_2 + \frac{4\lambda_s^3}{Eah} M_2 \quad (2)$$



از رابطه تعادل نیروی، به یک رابطه دیگر می‌رسیم. (تبادل نیروی قائم)

$$N_{q2} 2\pi(a \sin \alpha) \sin \alpha = \pi a^2 \sin^2 \alpha \rightarrow N_{q2} = \frac{P_a}{2}$$

از تبادل نیروی قائم خواهیم داشت: $H_1 + H_2 - N_{q2} \cos \alpha = 0 \rightarrow H_1 + H_2 - \frac{P_a}{2} \cos \alpha = 0 \quad (3)$

تبادل گشتاور: $M_1 = M_2 \quad (4)$

به عنوان مثال عدد خواهم داشت: (بر حسب میلی‌متر)

$$a = 36, \quad r = 12, \quad t = 1/2, \quad h = 1, \quad \nu = 0.3, \quad E = 30 \times 10^6, \quad P = 1000$$

نتیجه حاصله به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\delta_{mc} = 0.00816, \quad \delta_{ms} = 0.00504, \quad \sin \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\lambda_c = 0.524, \quad \lambda_s = 7.71, \quad k = 104160$$

$$H_1 = 4026, \quad H_2 = 12894, \quad M_1 = M_2 = -4267.5$$

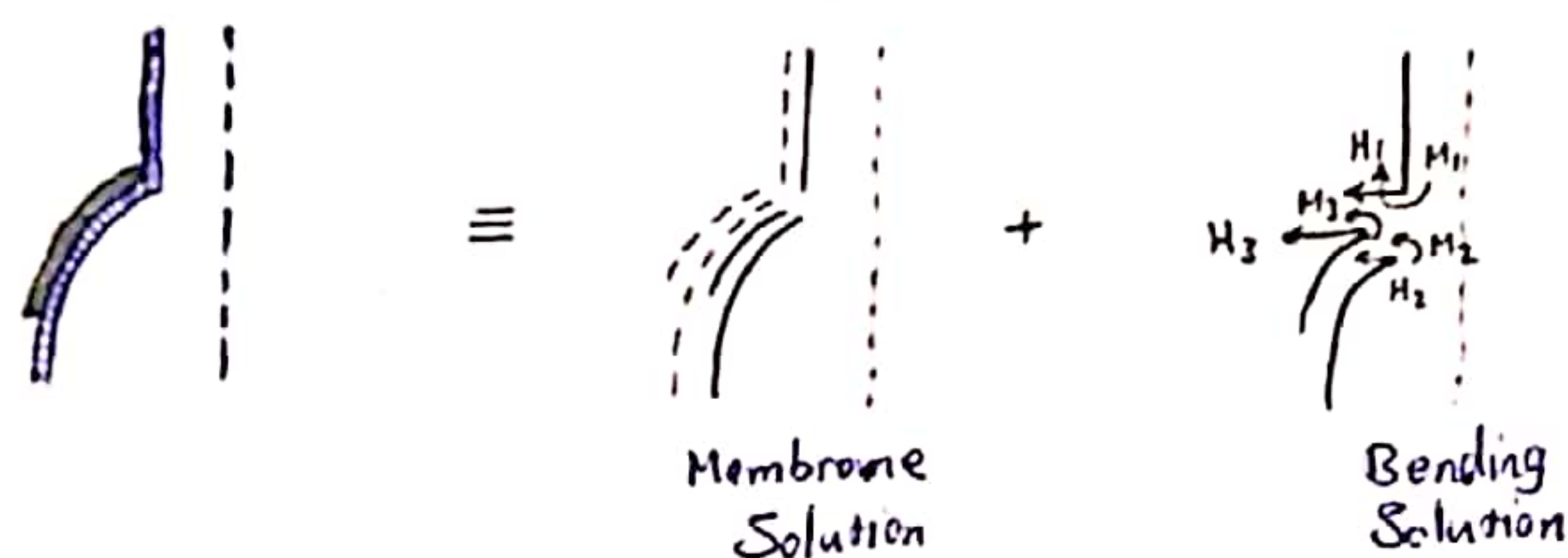
$$\sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{t} \pm \frac{12 M_{ij} z}{t^3} \quad (z \text{ یک توزیع خطی با یک مقدار میانگین } \frac{N_{ij}}{t} \text{ می‌باشد})$$

N شامل تنش و غشای است!

در محل اتصال: $\sigma_n|_{\text{لایه بیرونی}} = 114420, \quad \sigma_n|_{\text{لایه داخلی}} = -90420$

برای مرکز: $\sigma_\varphi|_{\text{لایه بیرونی}} = 43605, \quad \sigma_\varphi|_{\text{لایه داخلی}} = -7605$

در برخی موارد، برای تقویت پوسته اصلی به ویژه در محل ترک تنش، از پوسته ناقص دیگری که هم شکل می باشد، استفاده می گردد. این بود عموماً به پوسته اصلی و شکاف و به دو طریق چسب فایبر متصل می گردد. برای مثال اگر پوسته کردن شکل زیر توسط یک جواکروی ناقص تقویت شده باشد، آن گاه خواصیم داشت:



ارتباط گسترده خواصیم داشت: $M_1 = M_2 + M_3$

از قیاس Nq_2 کرد داخل

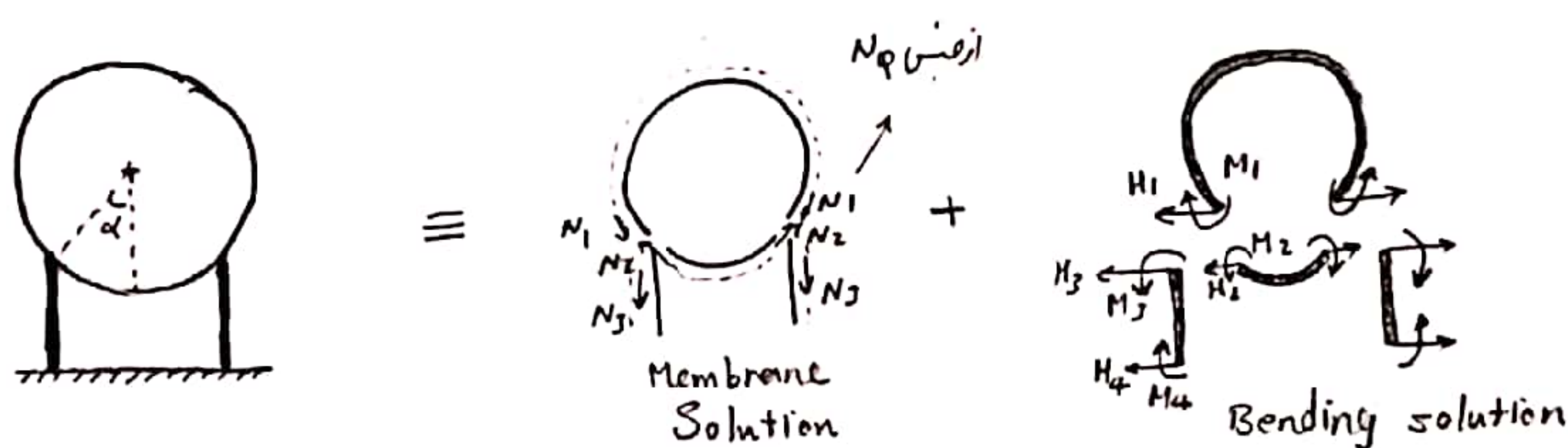
$$H_1 + H_2 + H_3 - \frac{Pa}{2} \cos \alpha = 0$$

ارتباط نبرد در صورت انحراف خواصیم داشت:

از سازگاری تغییر مکانها شاعر و تغییر شیب خواصیم داشت:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3, \quad V_1 = V_2 = V_3$$

شکل: بار فزنی



تغییر شیب به یکدیگر! $\rightarrow (N_1 - N_2) \sin \alpha + N_3 = 0$: از روابط تعادل در جهت قائم

از روابط تعادل در جهت افقی: $(N_1 - N_2) \cos \alpha - H_1 - H_2 - H_3 = 0$

رابطه تعادل گسترده: $M_1 - M_2 - M_3 = 0$

از سازگاری تغییر مکانها و شیب خواصیم داشت:

$$(V_1) = (V_2) = (V_3), \quad (\delta_1) = (\delta_2) = (\delta_3)$$

رابطه خمیر پوسته استوانه‌ای به نرم رابست :

(برای بارگذاری متقارن)

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Et}{a^2 D} w = \frac{P_2}{D}$$

با تعریف $4\lambda^4 = \frac{Et}{a^2 D} \leftarrow 4\lambda^4 = \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 t^2}$ ، پاسخ بدست آمده به نرم رابست خواهد بود :

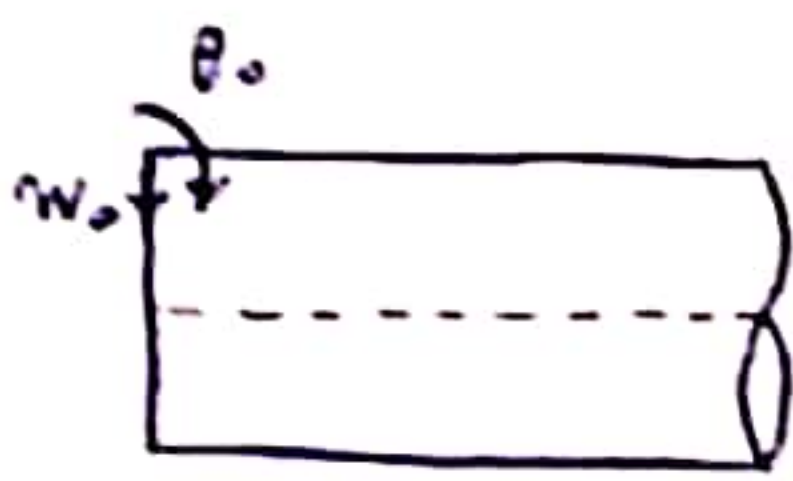
$$w = w_h + w_p$$

$$w_h = e^{\lambda x} (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x) + e^{-\lambda x} (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x)$$

برای پوسته بلند با توجه به اینکه در مقادیر x بزرگ ، w باید محدود باشد و در نتیجه ضرایب داشته :

$$w_h = e^{-\lambda x} (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x)$$

این پاسخ را بر حسب مقادیر خمیر و سبب انقباض پوسته بیان می‌کنیم :



$$x=0 : w=w_0 , \frac{dw}{dx} = \theta_0$$

$$\Rightarrow w_h = e^{-\lambda x} \left[w_0 (\cos \lambda x + \sin \lambda x) + \frac{\theta_0}{\lambda} \sin \lambda x \right]$$

برای حل خمشی ، پاسخ هانفقط شامل w_h وجود دارد زیرا توزیع بار خارج دکل خمشی در نظر گرفته نمی‌شود !

زیرا در دکل خمشی $P_2=0$ فرض می‌گردد ، با تعریف توابع زیر ضرایب داشته :

$$f_1(\lambda x) = e^{-\lambda x} (\cos \lambda x + \sin \lambda x) = \frac{-1}{\lambda} f_4'(\lambda x)$$

$$f_2(\lambda x) = e^{-\lambda x} \sin \lambda x = \frac{-1}{2\lambda} f_1'(\lambda x)$$

$$f_3(\lambda x) = e^{-\lambda x} (\cos \lambda x - \sin \lambda x) = \frac{1}{\lambda} f_2'(\lambda x)$$

$$f_4(\lambda x) = e^{-\lambda x} \cos \lambda x = \frac{-1}{2\lambda} f_3'(\lambda x)$$

$$\rightarrow w = f_1 \cdot w_0 + \frac{\theta_0}{\lambda} f_2 \quad (1)$$

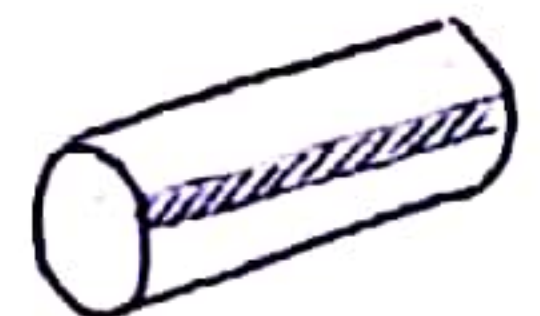
در این پاسخ ضرایب داشته :

$$\theta = \frac{dw}{dx} = -2\lambda w_0 f_2 + \theta_0 f_3 \quad (2)$$

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = 2\lambda D [\lambda w_0 f_3 + \theta_0 f_4] \quad (3)$$

$$Q_x = -D \frac{d^3 w}{dx^3} = -2\lambda^2 D [2\lambda w_0 f_4 + \theta_0 f_1] \quad (4)$$

$$Q_x = H \quad (\text{استوانه}) \quad Q_x \neq H \quad (\text{کوبه})$$



معادله خمیر پوسته مانند معادله تیرهای تک‌گانه الاستیک است :

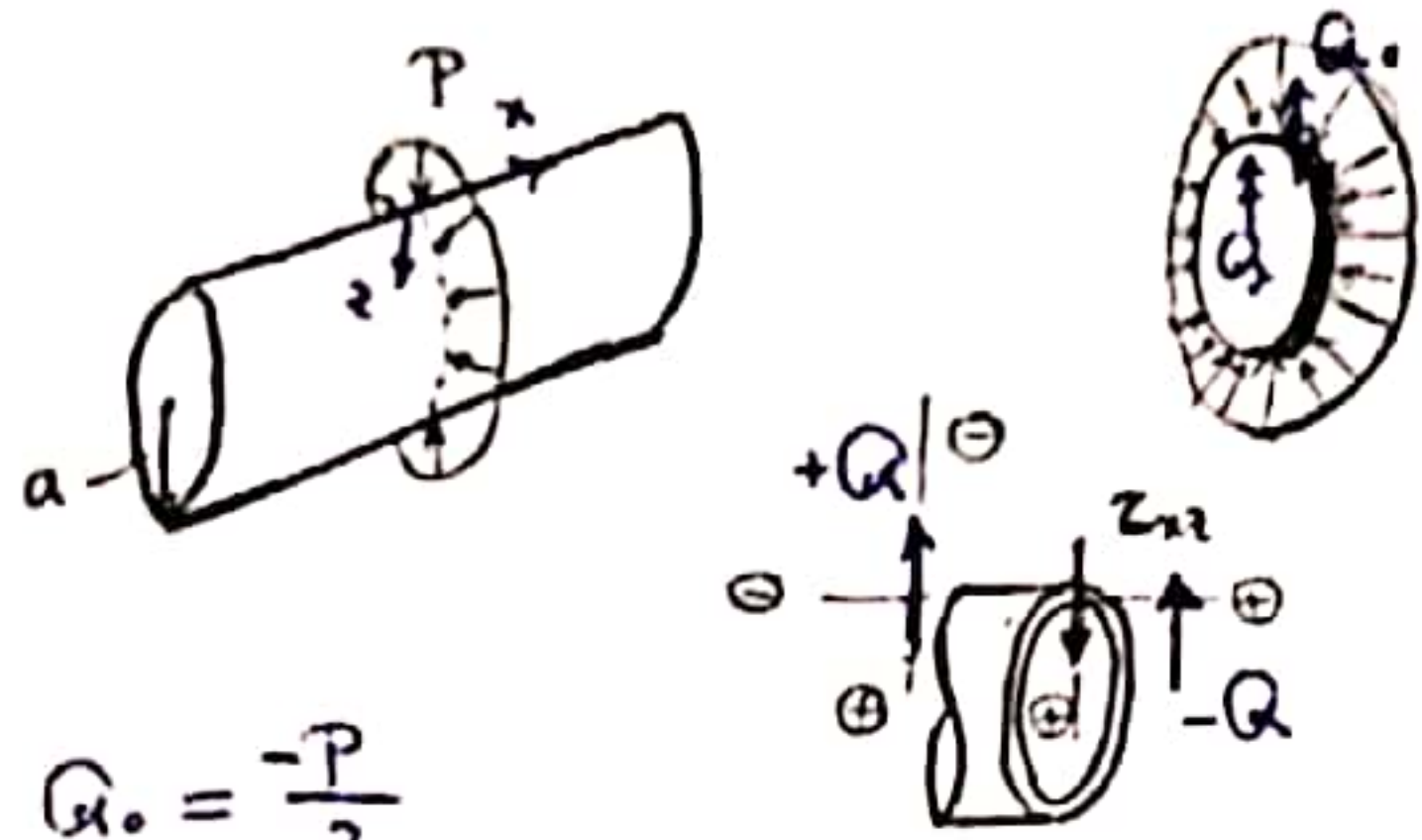
$$w'''' + \frac{k}{EI} w = 0$$

زیرا عوفه داخلی از پوسته در یک بخش الاستیک (تعبیر پوسته) قرار دارد .

$$w'''' = \frac{P}{EI} = \frac{-kw}{EI} \sim \frac{-kw}{D} \Rightarrow k = \frac{Et}{a^2}$$

حرفی از پوسته مانند یک تیر تک‌گانه الاستیک عمل می‌کند .

مثال: پوسته استوانه‌ای بلند تحت بار مستقیم حلقوی



این استوانه از جنس پسته را به گونه ای تجزیه می‌کنیم که بارها در میان اجزاء آن وارد شود.
بار موزون، بار لبه‌ای باشد. لذا پوسته به دو جزء تجزیه خواهد شد. در مقطع $x=0$ خواصیم داشت:

(سمت راست) $Q_0 = -\frac{P}{2}$

(سمت چپ) $Q_0 = \frac{P}{2}$

$$w_0 = \frac{P}{8\lambda^3 D} = \frac{Pa^2 \lambda}{2Et}$$

$$M_0 = \frac{P}{4\lambda} = M_{max}$$

باتوجه به تقارن در $\theta=0$, $\chi=0$ خواهد بود. لذا از رابطه (4) خواصیم داشت:

و از رابطه (3) خواصیم داشت:

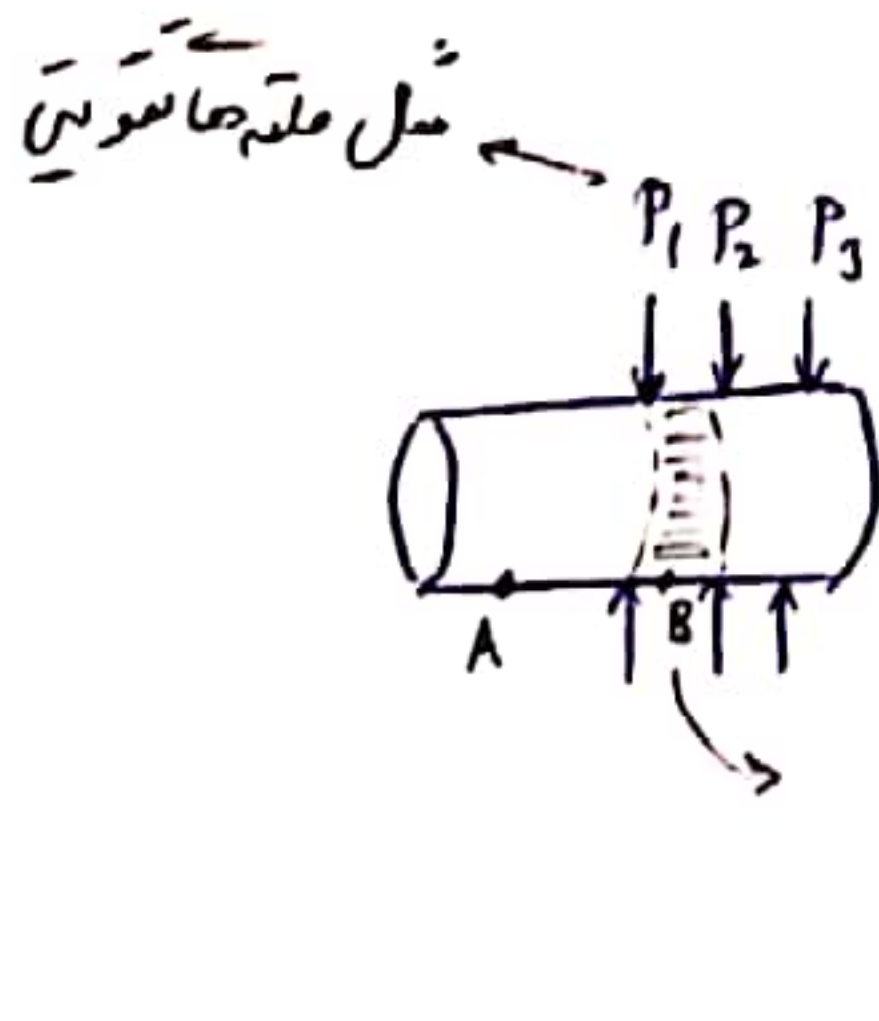
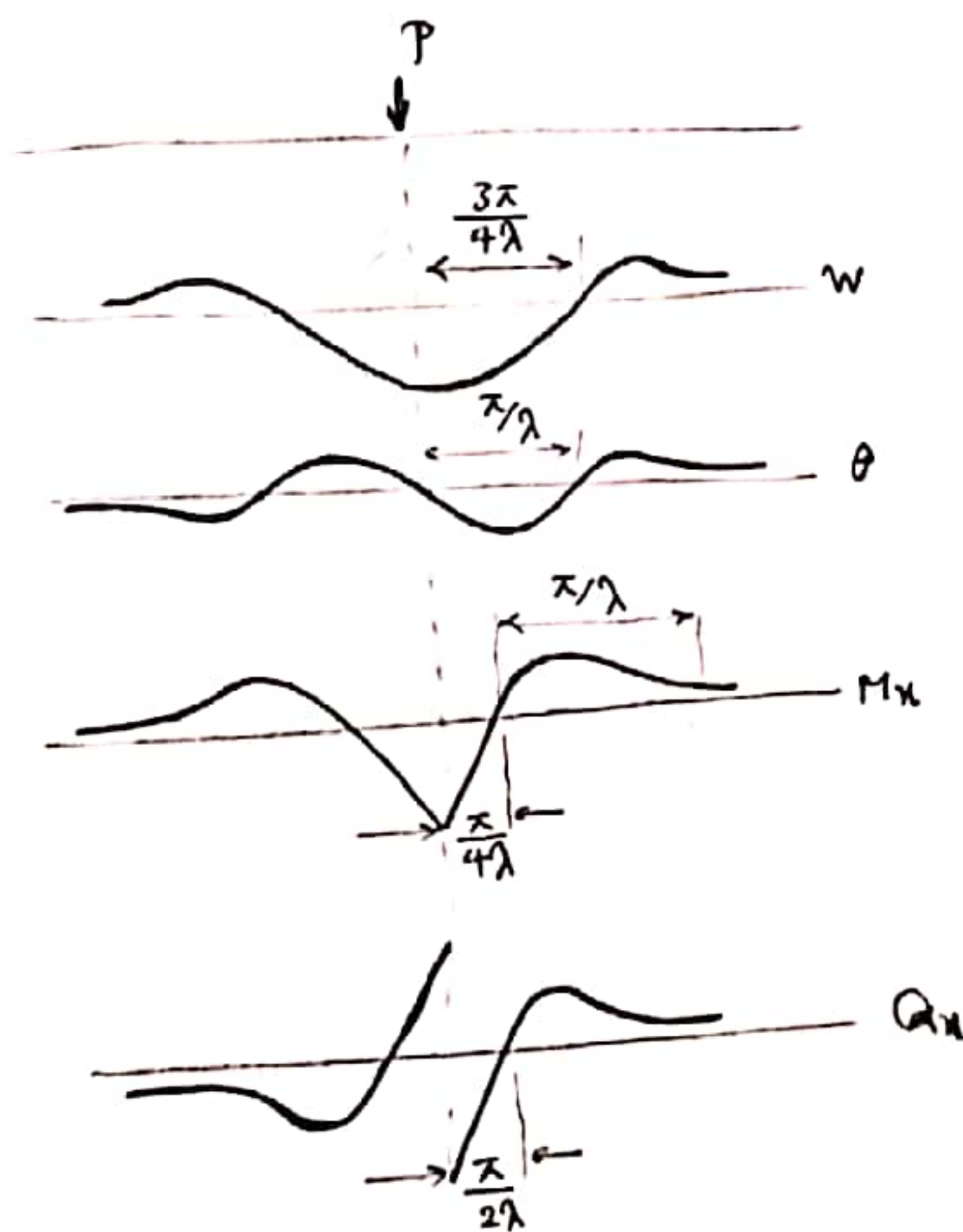
$$\Rightarrow w = \frac{P}{8\lambda^3 D} f_1(\lambda x), \quad \theta = -\frac{P}{4\lambda^2 D} f_2(\lambda x), \quad M_x = \frac{P}{4\lambda} f_3(\lambda x), \quad Q_x = -\frac{P}{2} f_4(\lambda x), \quad M_\theta = \nu M_x$$

صفر را می‌گیریم $\rightarrow \begin{cases} M_x = -D(k_x + \nu k_\theta) \\ M_\theta = -D(k_\theta + \nu k_x) \end{cases} \quad \nu=0 \rightarrow w_{,\theta\theta}=0 \rightarrow M_x = -D(w_{,xx}), \quad M_\theta = -D(\nu w_{,xx})$

$$N_\theta = -\frac{EtP}{8\lambda^3 Da} f_1(\lambda x)$$

$$\chi=0, \quad z=\frac{t}{2} \rightarrow (\sigma_x)_{max} = \frac{3P}{2\lambda t^2}, \quad (\sigma_\theta)_{max} = \frac{P\lambda}{2} \left(-\frac{a}{t} + \frac{3\nu}{\lambda^2 t^2} \right)$$

تغییرات گشتاور و تغییرات نیروی برشی است:

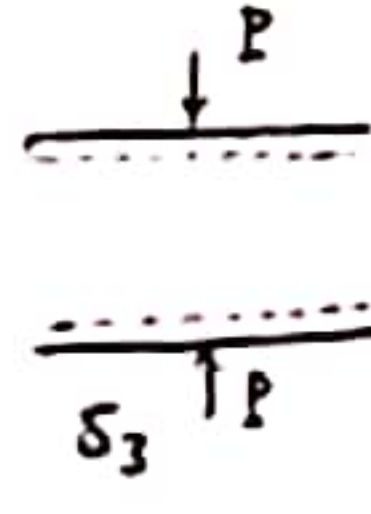
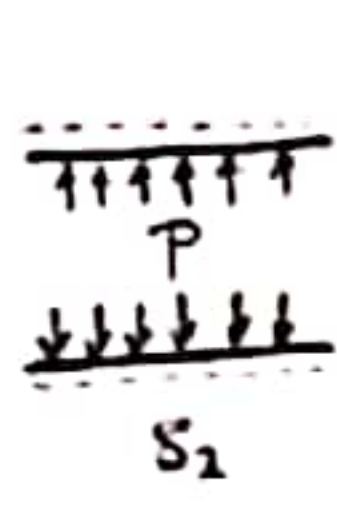
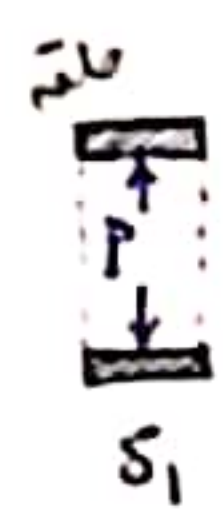
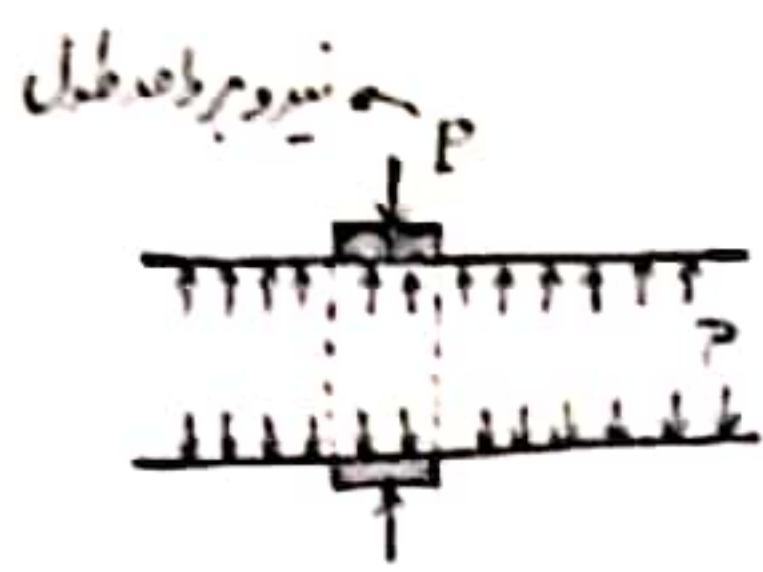


اگر چند بار مستقیم حلقوی به پوسته وارد کنید، مثل ناهمبند خارج از ناهمبند اعمال بارها (A) از جمع آنها قابل دسترس است.

پایه ناهمبند میان بارها از آن محاسبه است که فاصله دینیدو $l = \frac{2\pi}{\lambda}$ باشد. در غیر این صورت باید از

حل پوسته کوتاه در آن ناهمبند محاسبه است.

مثال: پوسته استوانه‌ای بلند با جلقه‌های تقویتی:



$$\delta_1 = \delta_2 + \delta_3$$

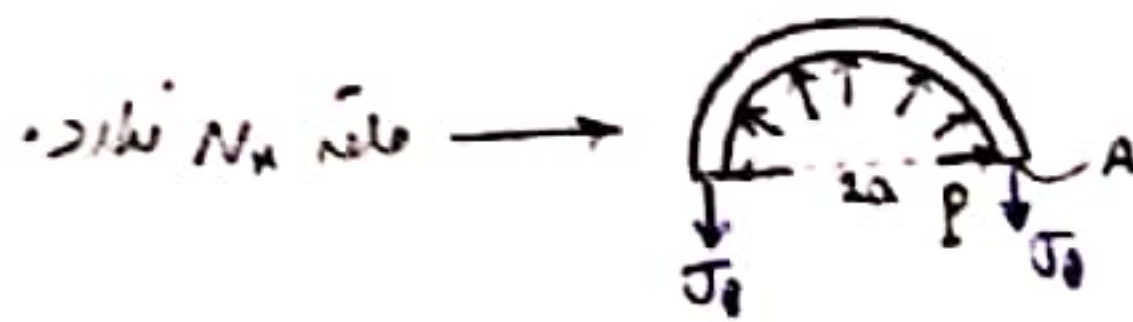
برای استوانه‌های باز خواصیم داشت:

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{Et} (N_\theta - \nu N_x) \rightarrow \delta = a\epsilon_\theta$$

$$\sigma_x = 0, \sigma_\theta = \frac{Pa}{t} \Rightarrow \delta_2 = \frac{Pa^2}{Et}$$

$$\sigma_x = \frac{Pa}{2t}, \sigma_\theta = \frac{Pa}{t} \Rightarrow \delta_2 = \frac{Pa^2}{Et} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)$$

$$\delta_3 = -\frac{P}{8\lambda^3 D}$$

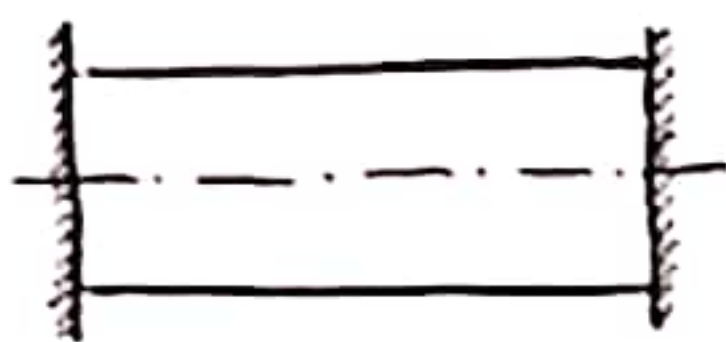


$$P \cdot 2a = 2\sigma_\theta A \rightarrow \sigma_\theta = \frac{Pa}{A} \rightarrow \epsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E} = \frac{Pa}{AE}$$

$$\delta_1 = a\epsilon_\theta = \frac{Pa^2}{AE}$$

$$\delta_1 = \delta_2 + \delta_3 \Rightarrow \frac{Pa^2}{Et} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) - \frac{P}{8\lambda^3 D} = \frac{Pa^2}{EA} \Rightarrow P \checkmark \Rightarrow \sigma_\theta \checkmark \Rightarrow \epsilon_\theta, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \checkmark$$

مثال: پوسته دوسرگیدار تحت فشار داخلی:



$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w = \frac{P_2}{D} = \frac{-P}{D}$$

پوسته بلند:
از معادله کلمن خواصیم داشت:

$$w = w_h + w_p$$

$$w_p = \frac{-Pa^2}{Et} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) = \delta_2$$

$$w = \frac{-Pa^2}{Et} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) + e^{-\lambda x} (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x)$$

با انتخاب مبدأ محور x در انتهای استوانه و غرض از شرط مرزی در اینجهت می‌انید:

$$x=0 \rightarrow w = \frac{dw}{dx} = 0$$

پوسته کوتاه:

با تبدیل پاشخ غایب بر حسب توابع هذلولی خواصیم داشت:

$$w_h = e^{\lambda x} (c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x) + e^{-\lambda x} (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x)$$

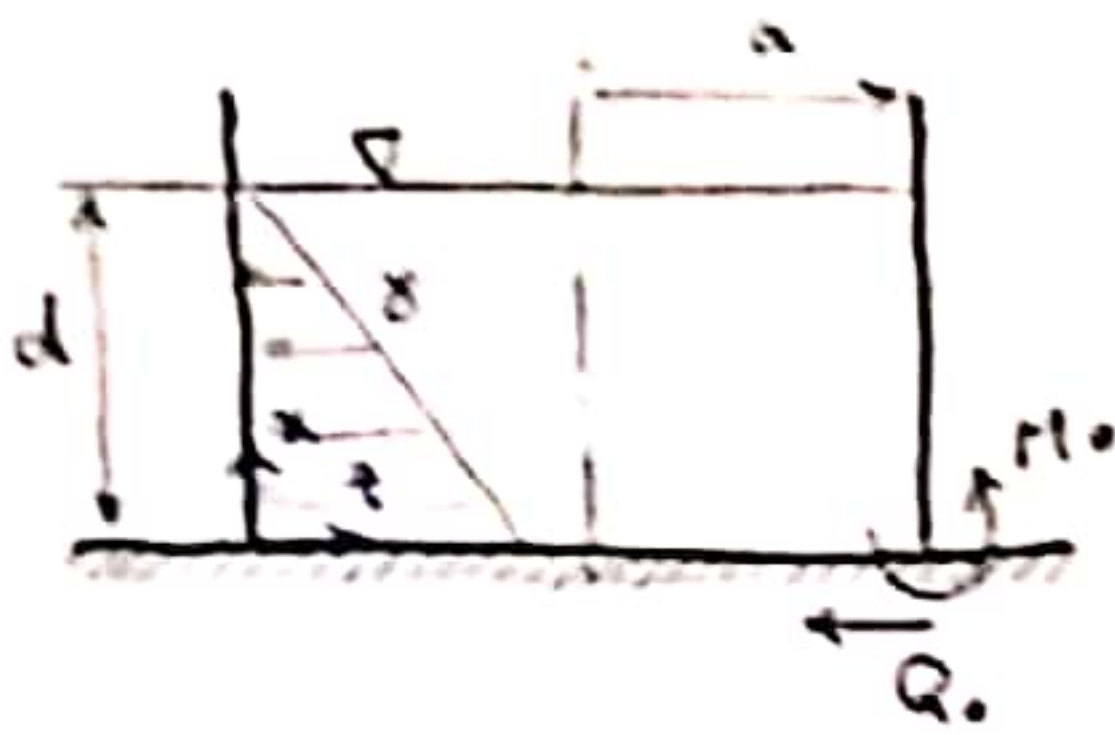
$$\Rightarrow w = \frac{-Pa^2}{Et} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) + c_1 \sin \lambda x \cdot \sinh \lambda x + c_2 \sin \lambda x \cdot \cosh \lambda x + c_3 \cos \lambda x \sinh \lambda x + c_4 \cos \lambda x \cosh \lambda x$$

$$c_2 = c_3 = 0$$

با استفاده از شرایط مبدأ محور x در میان استوانه اختیار می‌کنیم:

$$x = \frac{L}{2} \rightarrow w = \frac{dw}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{2Pa^2}{Et} \left(\frac{\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha}{\sin 2\alpha + \sinh 2\alpha} \right), \quad c_4 = \frac{2Pa^2}{Et} \left(\frac{\cos \alpha \sinh \alpha + \sin \alpha \cosh \alpha}{\sin 2\alpha + \sinh 2\alpha} \right), \quad \alpha = \frac{\lambda L}{2}$$



از رابطه نیز: $\frac{d^4 w}{dx^4} + \lambda^4 w = \frac{P_z}{D} = \frac{-\delta(d-x)}{2D}$

$w_p = \frac{-\delta(d-x)}{2\epsilon + \lambda^4 D} = -\frac{\delta(d-x) a^2}{2\epsilon t}$

که همان رابطه مسئله قبل است. (پایین‌ترین) با فرض پستی خطی و عدم تغییر است:

$w = -\frac{\delta(d-x)a^2}{2\epsilon t} + e^{-\lambda x} (c_3 \cos \lambda x + c_4 \sin \lambda x)$

شرایط مرزی: $x=0 \rightarrow w = \frac{dw}{dx} = 0 \Rightarrow$ پاسخ می‌دهد: $w = -\frac{\delta a^2 d}{\epsilon t} \left[1 - \frac{x}{d} - f_1(\lambda x) - \left(1 - \frac{1}{\lambda d}\right) f_2(\lambda x) \right]$

در اینجا $N_x = 0$, $N_\theta = -\frac{E t w}{a} = \delta a d \left[1 - \frac{x}{d} - f_1(\lambda x) - \left(1 - \frac{1}{\lambda d}\right) f_2(\lambda x) \right]$

$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{\delta a d t}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left[-f_2(\lambda x) + \left(1 - \frac{1}{\lambda d}\right) f_1(\lambda x) \right]$

$M_0 = (M_x)_{\max} = \left(1 - \frac{1}{\lambda d}\right) \frac{\delta a d t}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \text{ at } x=0$

تغییرات مؤلفه‌های جابجایی در پستی استوانه‌ای (حالت کلی)

فرم معادلات دینامیک حاکم بر مؤلفه‌های نیرو و گشتاور در برده‌های طولی در این حالت به فرم زیر است: ($P_x = P_\theta = 0$)

$\alpha N_{x,x} + N_{\theta,\theta} = 0$

$N_{\theta,\theta} + \alpha N_{\theta,x} + M_{x,\theta} - \frac{1}{a} M_{\theta,\theta} = 0$

$N_\theta - N_{\theta,\theta} + \alpha M_{x,\theta} - \frac{1}{a} M_{\theta,\theta} + P a = 0$

اگر نسبت‌های نیرو و گشتاور در برده‌های طولی با هم از آنجا که از مؤلفه‌های جابجایی جابجایی می‌گیرند، با استفاده از فرض « ν لا سون» می‌توان برانداختن عبارت زیر

در برده‌های عبارت‌ها: $w_{,x\theta}, w_{,\theta\theta}, v_{,x\theta}, v_{,\theta\theta}, (v_{,xx}, \frac{1}{a} v_{,\theta\theta}) \frac{t^2}{12a}$

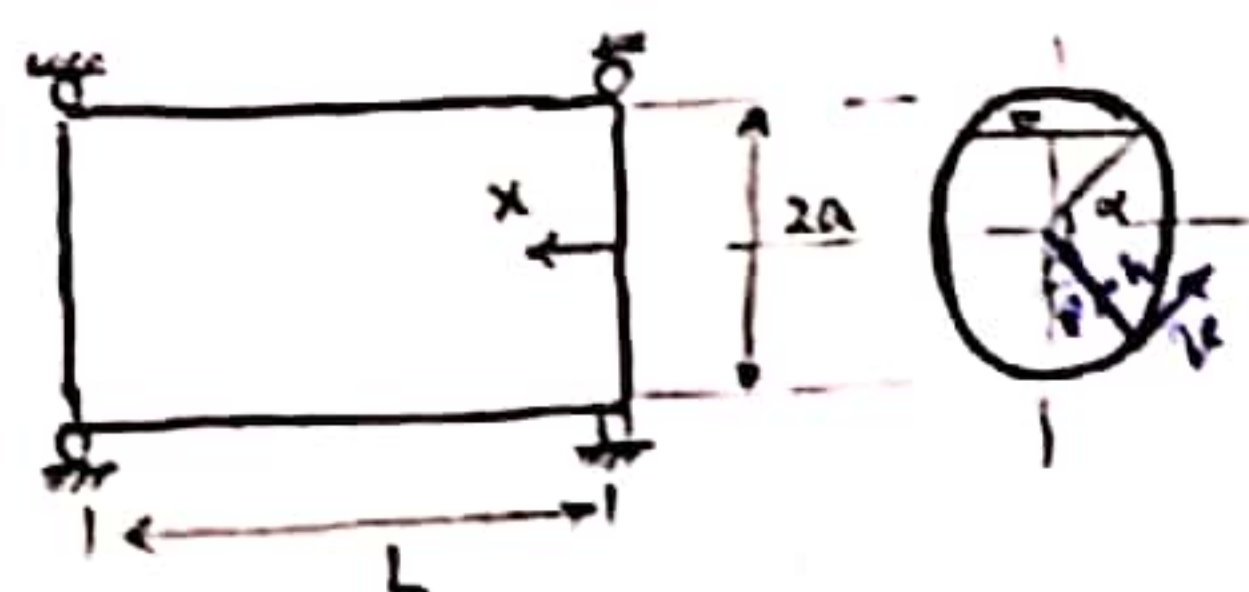
به سنجش زیر می‌رسیم:

$u_{,xx} + \frac{1-\nu}{2a^2} u_{,\theta\theta} + \frac{1+\nu}{2a} v_{,x\theta} - \frac{\nu}{a} w_{,x} = 0$

$\frac{1+\nu}{2} u_{,x\theta} + \alpha \frac{1-\nu}{2} v_{,xx} + \frac{1}{a} v_{,\theta\theta} - \frac{1}{a} w_{,\theta} = 0$

$\nu u_{,x} + \frac{1}{a} v_{,\theta} - \frac{w}{a} - \frac{t^2}{12} \left(\alpha w_{,xxxx} + \frac{2}{a} w_{,xx\theta\theta} + \frac{1}{a^3} w_{,\theta\theta\theta\theta} \right) = \frac{-\alpha T(1-\nu^2)}{\epsilon t} \quad (1)$

مثال:



پس به تعریف پیرامون خط نام و مقطع می‌توان نوشت: فرم پاسخ را بصورت زیر می‌نویسیم:

$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(n\theta) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$

$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin(n\theta) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cos(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$

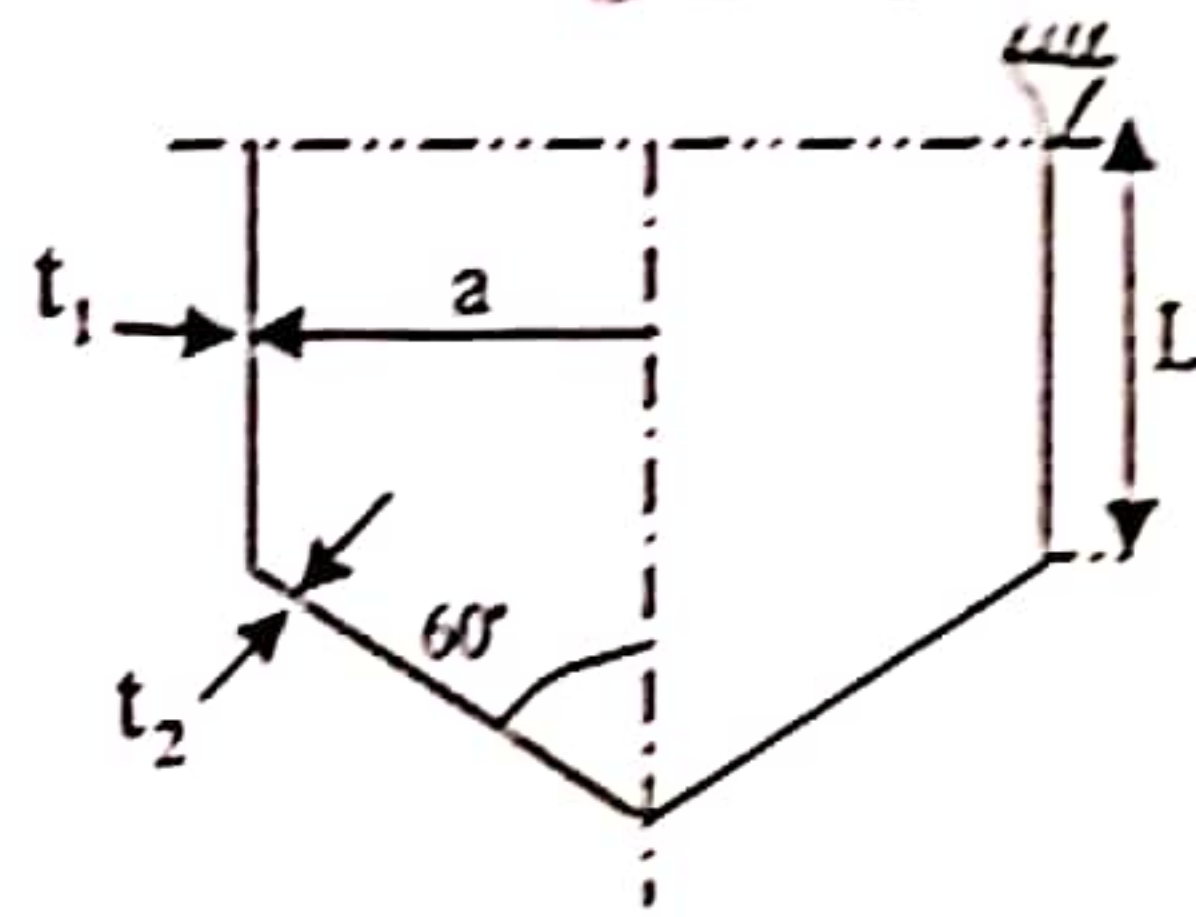
لذا طبق اصل اصل (1) بر حسب سری دوگانه می‌توان نوشت: برای یافتن ضرایب سری لازم است که نسبت دم رابطه (P) نیز به سری توانی گسترش داده شود:

$\theta < \alpha: P = -\delta a (\cos \theta - \cos \alpha), \quad \theta > \alpha: P = 0$

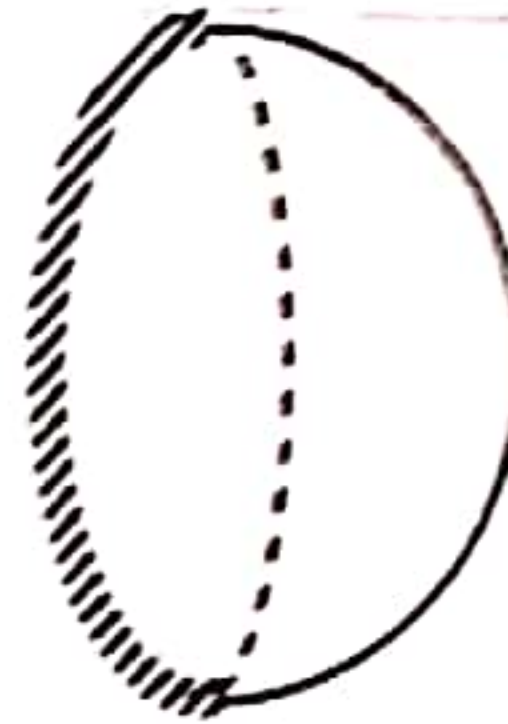
$P = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \cos(n\theta) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \rightarrow D_{mn} = \frac{4}{2L} \int_0^L \int_0^{2\pi} P \cdot \cos(n\theta) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) d\theta dx$

$D_{mn} = \frac{-8\delta a}{m\pi^2(n^2-1)} [\cos \alpha \sin(n\alpha) - n \cos(n\alpha) \sin \alpha] \quad \begin{cases} D_{m0} = \frac{-4\delta a}{m\pi^2} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \\ D_{m1} = \frac{-2\delta a}{m\pi^2} (2\alpha - \sin 2\alpha) \end{cases}$
 $m = 1, 3, 5, \dots$
 $n = 2, 3, 4, \dots$

- ✓ ۱- الف) مجموعه نشان داده شده از آب پر شده است؛ با فرض آنکه تکیه گاههای لبه بالائی مجموعه از نوع غلطکی باشند؛ نسبت ضخامت بخشهای استوانه‌ای و مخروطی را به گونه‌ای پیشنهاد نمایید که انبساط شعاعی در محل اتصال آنها یکسان باشد برای این منظور از تحلیل غشائی کمک بگیرید.
۹. ب) در این حالت، در محل اتصال دو جزء یاد شده، نیروی برشی صفر است یا گشتاور خمشی؟



- ۲- الف) مقادیر نیروی غشائی بر واحد طول ایجاد شده در یک مخزن نیم کره‌ای تحت نیروی وزن خودی را بدست آورید.
- ✓ ب) تشبیهی پدید آمده در یک سازه به قرم پوسته مخروطی ناقص قائم تحت جریان باد افقی را پیدا نمایید.



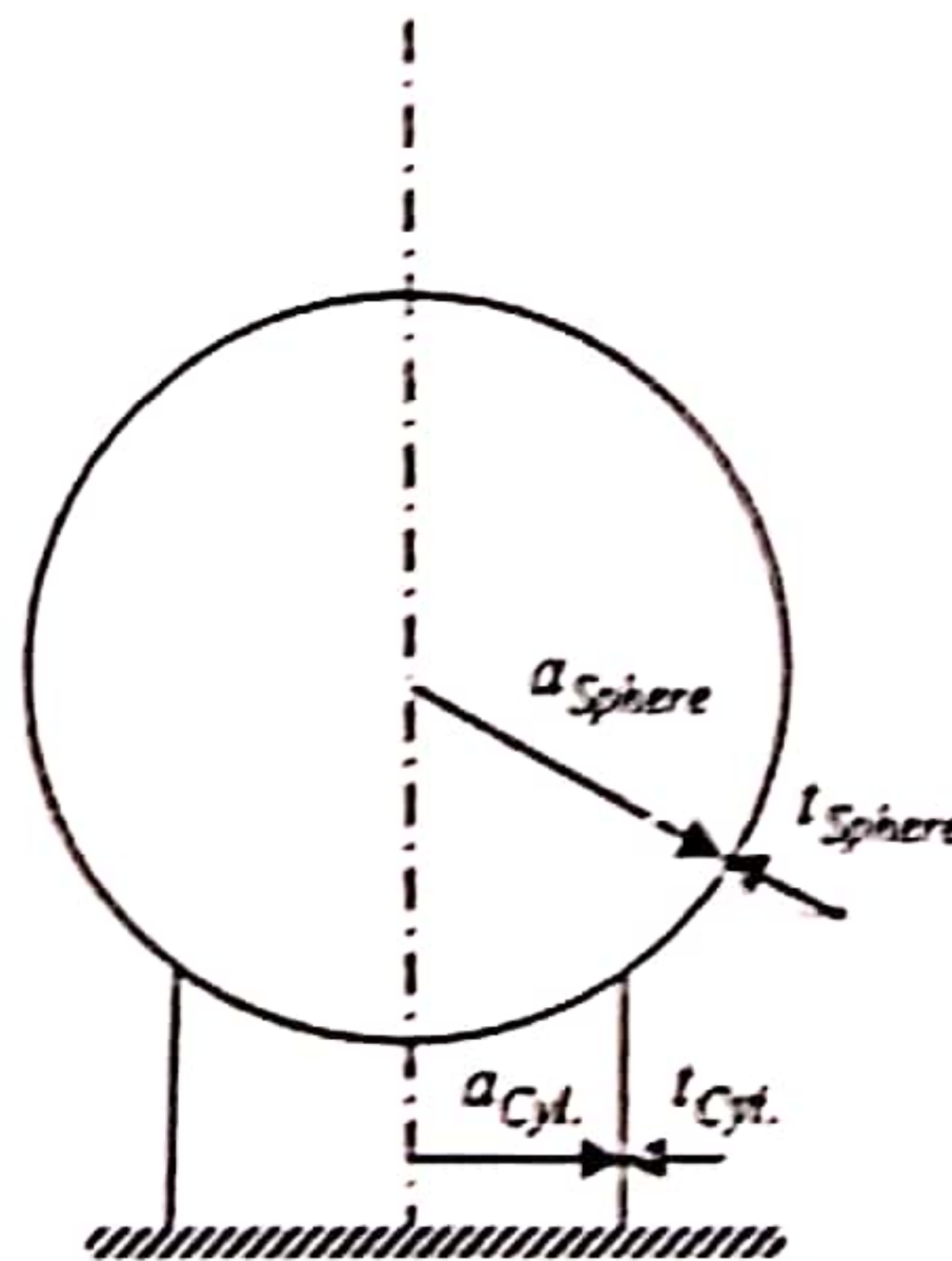
- ۳- الف) تشبیهی ایجاد شده در لایه خارجی و لایه داخلی محل اتصال بخشهای استوانه‌ای و کره مخزن آب نشان داده شده با ویژگیهای زیر:

$$\nu = 0.3 \quad E = 2 \times 10^5 [N/mm^2]$$

$$a_{Sphere} = 1000 [mm] \quad t_{Sphere} = 20 [mm] \quad a_{Cyl.} = 500 [mm] \quad t_{Cyl.} = 10 [mm]$$

و با یکارگیری نتایج تقریب اول کره و فرض بلند بودن بخش استوانه‌ای، بدست آورید. تنها بخش کره‌ای از آب پر شده است.

- ✓ ب) آیا فرض تقریب اول کره در این مثال برقرار است؟ طول بخش استوانه‌ای باید چقدر باشد تا روابط پوسته بلند برای آن برقرار گردند؟

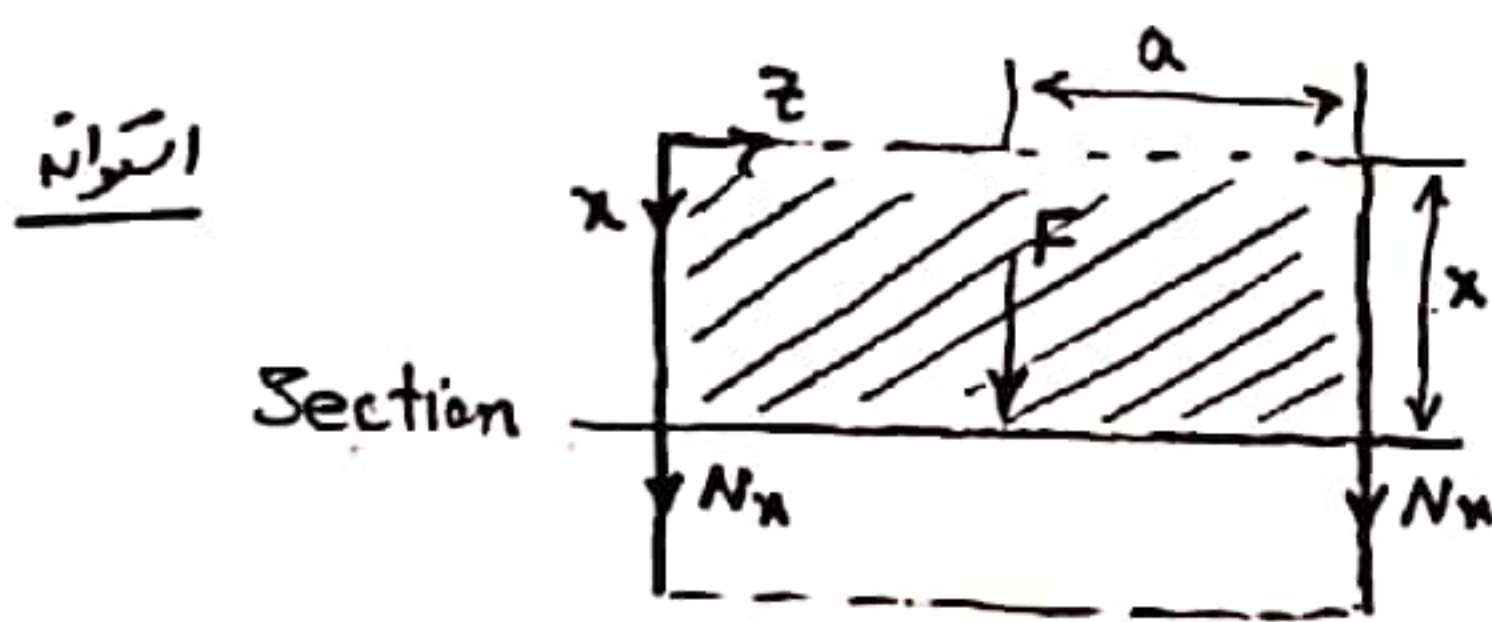
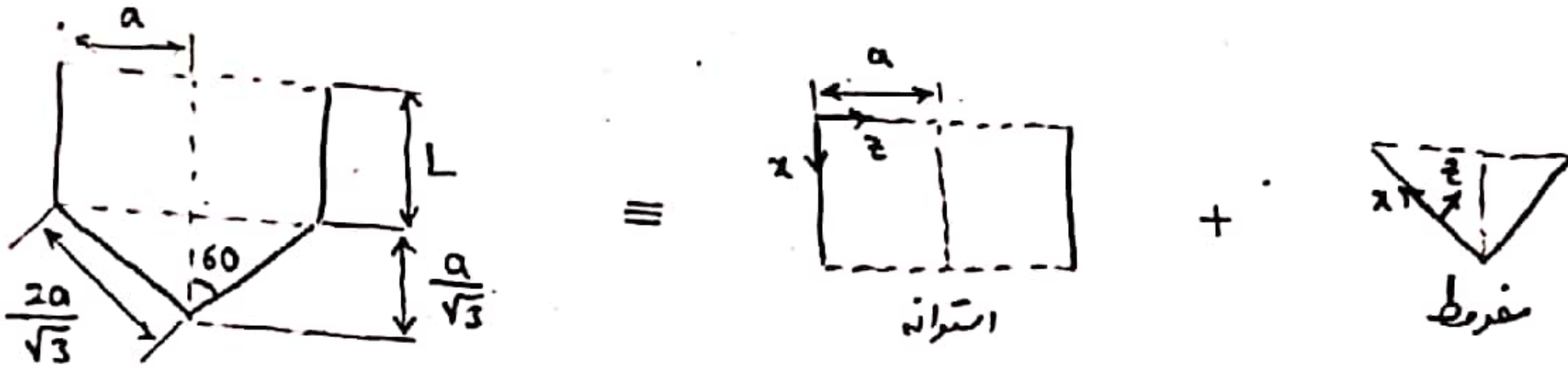


معادلات حاکم بر پرستنه دوار متجانس با بار نوار مستطانی بصورت زیر است:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\varphi} (r_0 N_\varphi) - r_1 N_\theta \cos \varphi + r_1 r_0 P_\varphi = 0 \\ \frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} + P_z = 0 \end{cases}$$

البته یکای معادله اول هم طول از رابطه زیر استفاده نمود:

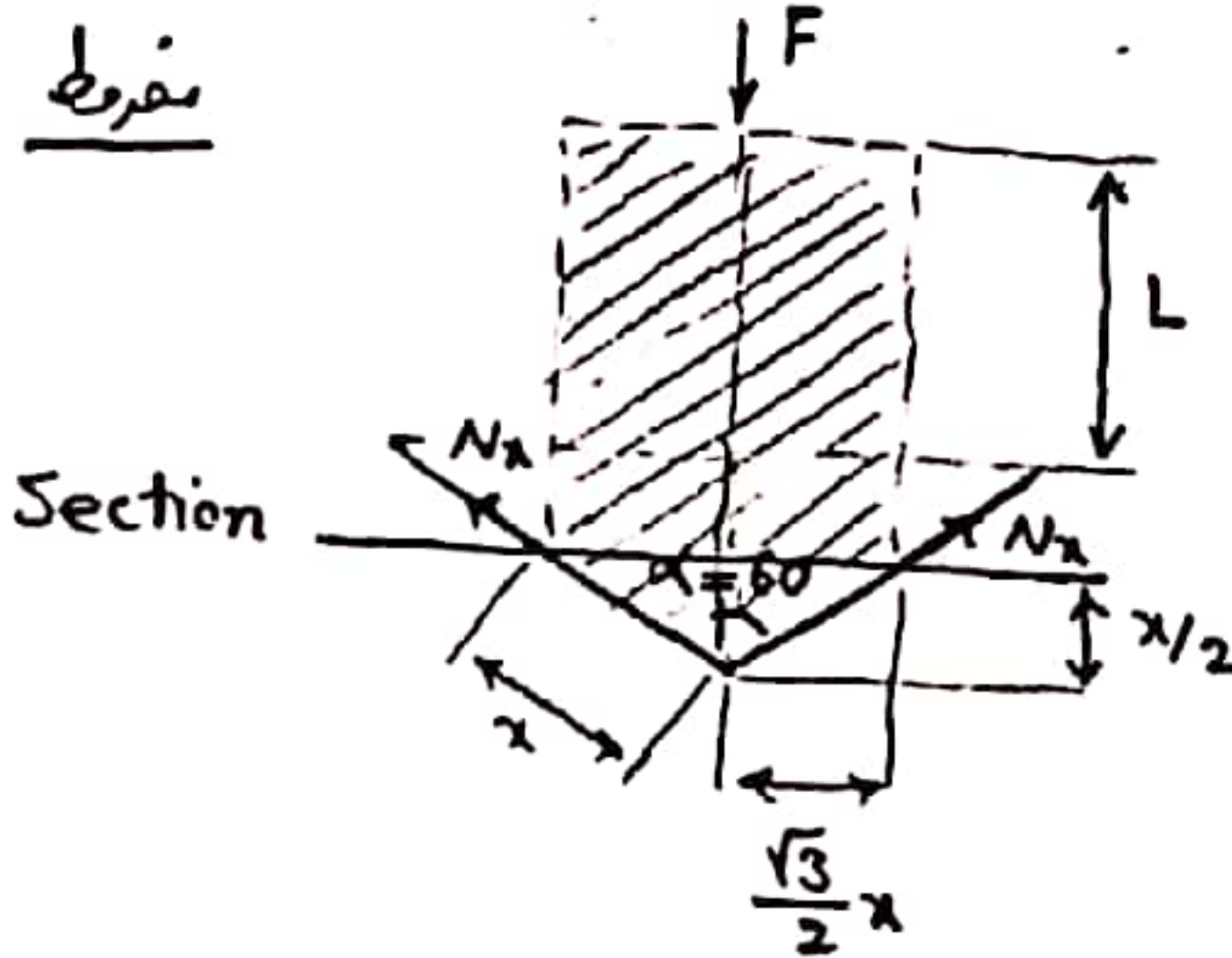
$$N_\varphi = \frac{-F}{2\pi r_0 \sin \varphi}$$



$$r_0 = r_2 = a, r_1 = \infty, \varphi = \pi/2$$

$$F = \delta (\pi a^2 x) \Rightarrow N_x = \frac{-F}{2\pi a \sin \pi/2} = \frac{-\pi a^2 \delta x}{2\pi a} = -\frac{1}{2} a x \delta$$

$$\frac{N_x}{\infty} + \frac{N_\theta}{a} + P_z = 0 \Rightarrow N_\theta = -a P_z = +a \delta x$$



$$r_1 = \infty, r_0 = x \sin \alpha, r_2 = x \tan \alpha, \varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$F = \delta \cdot \left[\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right)^2 \right] \cdot \left[L + \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{x}{2} \right] = \frac{3}{4} \pi \delta x^2 \left(L + \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{x}{2} \right)$$

$$\Rightarrow N_x = \frac{F}{2\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \cos 60} = \frac{\sqrt{3}}{2} \delta x \left(L + \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{x}{2} \right)$$

$$\frac{N_x}{\infty} + \frac{N_\theta}{x \tan 60} + P_z = 0 \Rightarrow N_\theta = -\sqrt{3} x P_z = -\sqrt{3} x \left[-\delta \left(L + \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{x}{2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow N_\theta = \sqrt{3} x \delta \left(L + \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{x}{2} \right)$$

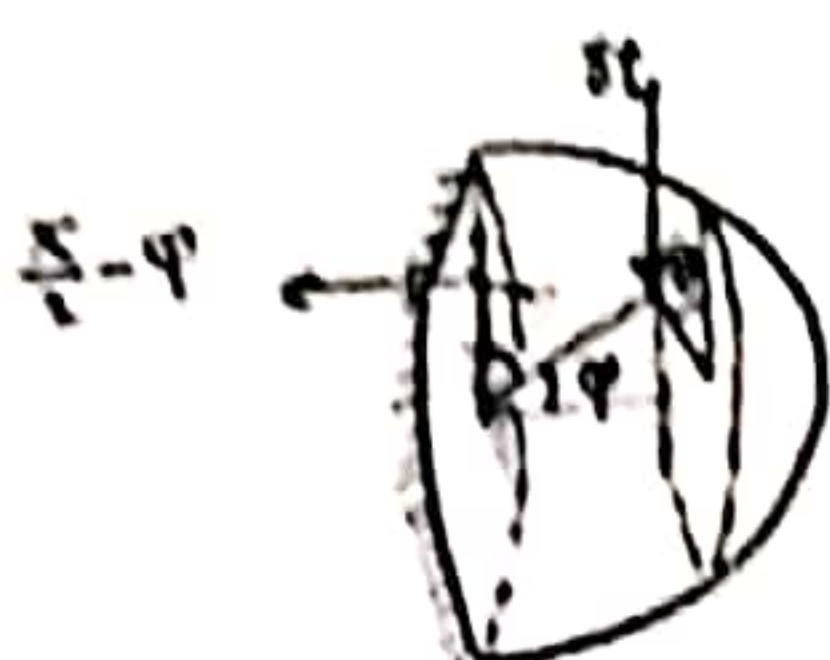
$$\delta_{\text{استوانه}} = (a \epsilon_\theta)_{x=L} = \frac{a}{E t_1} [N_\theta - \nu N_x]_{x=L} = \frac{a}{E t_1} \left[a \delta L - \nu \left(-\frac{1}{2} a \delta L \right) \right] = \frac{\delta L a^2}{E t_1} \left(1 + \frac{\nu}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\text{مقرطه}} &= (a \epsilon_\theta)_{x=\frac{a}{\sqrt{3}}} = \frac{a}{E t_2} [N_\theta - \nu N_x]_{x=\frac{a}{\sqrt{3}}} = \frac{a}{E t_2} \left[\sqrt{3} \delta \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \left(L + \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{a}{2\sqrt{3}} \right) - \nu \frac{\sqrt{3}}{2} \delta \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \left(L + \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{a}{2\sqrt{3}} \right) \right] \\ &= \frac{\delta a^2}{E t_2} \left(L + \frac{a}{2\sqrt{3}} \right) \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\delta_{\text{استوانه}} = \delta_{\text{مقرطه}} \Rightarrow \frac{\delta L a^2}{E t_1} \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) = \frac{\delta a^2}{E t_2} \left(L + \frac{a}{2\sqrt{3}} \right) \left(1 - \frac{\nu}{2} \right) \Rightarrow \frac{L}{t_1} \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) = \frac{1}{t_2} \left(L + \frac{a}{2\sqrt{3}} \right) \left(1 - \frac{\nu}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = \frac{L + \frac{a}{2\sqrt{3}}}{L} \times \frac{1 - \frac{\nu}{2}}{1 + \frac{\nu}{2}} = \frac{2 - \nu}{2 + \nu} \left(1 + \frac{a}{2\sqrt{3}L} \right)$$

در حالت کلی که محل شغل دو قسمت علی و سفلی باشد، هیچ کدام از آنها نمی توانند نفس و نیروی پرشی مغز نیست! تا زمانی که اینک شعاع (در پایداری معین)
در حال انتقال به مغز نیست، نیروی پرشی در همان مکان موجود می ماند و هم چنین تا زمانی که زاینه نفس در حال انتقال به پرش نیست، یک تدریس را جدا می کند.
در این مسئله، بانی حرکت یک گام معانی است مغز و حرکت و اجاره می بایست نفس (اینک معین) به مغز استوانه ای داده می شود و قسمتی -
از مغز که به صورت مغز می باشد، همانند یک یک گام معانی است و در این حالت به وجود آمدن نیروی پرشی در حال انتقال
می گردد. هم چنین با این استوانه می تواند به یک گام معانی حرکت می کند و تا زمانی که نفس به وجود نخواهد آمد، در حال انتقال مغز همانند یک یک گام
محل کرده و تا به این می بایست و نفس استوانه می تواند به یک گام معانی حرکت می کند.



معادلات حاکم بر پرستم دوار متعارف با بارنداری غیر متعارف عبارت زیرین می باشد:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_\varphi) + r_1 N_{\theta\varphi,\theta} - r_1 N_\theta \cos \varphi + r_0 r_1 P_\varphi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_{\theta\varphi}) + r_1 N_{\theta,\theta} + r_1 N_{\theta\varphi} \cos \varphi + r_0 r_1 P_\theta = 0 \\ \frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} + P_z = 0 \end{cases}$$

با توجه به اینکه در کره $r_0 = a \sin \varphi$ ، $r_1 = r_2 = a$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi} (a \sin \varphi N_\varphi) + a N_{\theta\varphi,\theta} - a N_\theta \cos \varphi + a^2 \sin \varphi P_\varphi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (a \sin \varphi N_{\theta\varphi}) + a N_{\theta,\theta} + a N_{\theta\varphi} \cos \varphi + a^2 \sin \varphi P_\theta = 0 \\ \frac{N_\varphi}{a} + \frac{N_\theta}{a} + P_z = 0 \end{cases}$$

نبردها عبارت زیر خواهند بود:

$$P_\theta = \delta t \sin \theta \quad , \quad P_\varphi = \delta t \cos \theta \cos \varphi \quad , \quad P_z = \delta t \cos \theta \sin \varphi$$

در رستیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} N_\varphi \cos \varphi + N_{\varphi,\varphi} \sin \varphi + N_{\theta\varphi,\theta} - N_\theta \cos \varphi + a \delta t \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi = 0 \\ N_{\theta\varphi} \cos \varphi + N_{\theta\varphi,\varphi} \sin \varphi + N_{\theta,\theta} + N_{\theta\varphi} \cos \varphi + a \delta t \sin \theta \sin \varphi = 0 \\ N_\varphi + N_\theta + a \delta t \cos \theta \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

از معادله آخر می توان N_θ را حسب مورد در دو معادله دیگر قرار داد:

$$N_\theta = -N_\varphi - a \delta t \cos \theta \sin \varphi$$

و بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\begin{cases} N_\varphi \cos \varphi + N_{\varphi,\varphi} \sin \varphi + N_{\theta\varphi,\theta} + N_\varphi \cos \varphi + 2a \delta t \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi = 0 \\ N_{\theta\varphi} \cos \varphi + N_{\theta\varphi,\varphi} \sin \varphi - N_{\varphi,\theta} + 2a \delta t \sin \theta \sin \varphi + N_{\theta\varphi} \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2N_\varphi + N_{\varphi,\varphi} \tan \varphi + N_{\theta\varphi,\theta} \frac{1}{\cos \varphi} = -2a \delta t \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \\ 2N_{\theta\varphi} + N_{\theta\varphi,\varphi} \tan \varphi - N_{\varphi,\theta} \frac{1}{\cos \varphi} = -2a \delta t \sin \theta \sin \varphi \end{cases}$$

با استفاده از تغییر متغیر زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} N_\varphi = S_\varphi \cos \theta \\ N_{\theta\varphi} = S_{\theta\varphi} \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{\varphi,\varphi} \tan \varphi + 2S_\varphi + S_{\theta\varphi} \frac{1}{\cos \varphi} = -2a \delta t \sin \varphi \cos \varphi \\ S_{\theta\varphi,\varphi} \tan \varphi + 2S_{\theta\varphi} + S_\varphi \frac{1}{\cos \varphi} = -2a \delta t \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1 = S\varphi + S_{\theta\varphi} \\ U_2 = S\varphi - S_{\theta\varphi} \end{cases}$$

با جمع و تفریق کردن دو معادله فوق با یکدیگر و با استفاده از تغییر متغیر بعد از فرایم داشت:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dU_1}{d\varphi} + \left(2\cot\varphi + \frac{1}{\sin\varphi}\right) U_1 = -2a\delta t \cos\varphi (\cos\varphi + 1) \\ \frac{dU_2}{d\varphi} + \left(2\cot\varphi - \frac{1}{\sin\varphi}\right) U_2 = -2a\delta t \cos\varphi (\cos\varphi - 1) \end{cases}$$

حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت زیر است:

$$y' + Py = Q \rightarrow e = e^{\int P dy} \rightarrow Py = \int P Q dy + c$$

(انتگرال گیری ها با استفاده از برنامه MATLAB محاسبه شده اند) بدین ترتیب فرایم داشت:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{(1+\cos\varphi) \sin^3\varphi} \left[-\frac{1}{2} a\delta t \sin^4\varphi + c_1 \right] \\ U_2 = \frac{1}{(1+\cos\varphi) \sin\varphi} \left[+2a\delta t \left(\frac{-1}{4} \cos^4\varphi + \frac{1}{2} \cos^2\varphi \right) + c_2 \right] \end{cases}$$

با توجه به تغییر متغیرهای U_1 و U_2 به متغیر $S\varphi$ و $S_{\theta\varphi}$ فرایم داشت:

$$\begin{cases} S\varphi = \frac{1}{2} (U_1 + U_2) \\ S_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} (U_1 - U_2) \end{cases}$$

$$S\varphi = \frac{-1}{8 \sin\varphi (-1 + \cos^2\varphi)} \left[-2a\delta t (2\cos^5\varphi - 4\cos^3\varphi + \cos\varphi + 1) + 4\cos\varphi (c_1 - c_2) + 4c_2 \right]$$

$$S_{\theta\varphi} = \frac{-1}{8 \sin\varphi (-1 + \cos^2\varphi)} \left[-2a\delta t (2\cos^4\varphi - 4\cos^2\varphi + \cos\varphi + 1) + 4\cos\varphi (c_1 + c_2) + 4(c_1 - c_2) \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{\varphi} = \frac{-\cos\theta}{8 \sin\varphi (-1 + \cos^2\varphi)} \left[-2a\delta t (2\cos^5\varphi - 4\cos^3\varphi + \cos\varphi + 1) + 4\cos\varphi (c_1 - c_2) + 4c_2 \right] \\ N_{\theta\varphi} = \frac{-\sin\theta}{8 \sin\varphi (-1 + \cos^2\varphi)} \left[-2a\delta t (2\cos^4\varphi - 4\cos^2\varphi + \cos\varphi + 1) + 4\cos\varphi (c_1 + c_2) + 4(c_1 - c_2) \right] \end{cases}$$

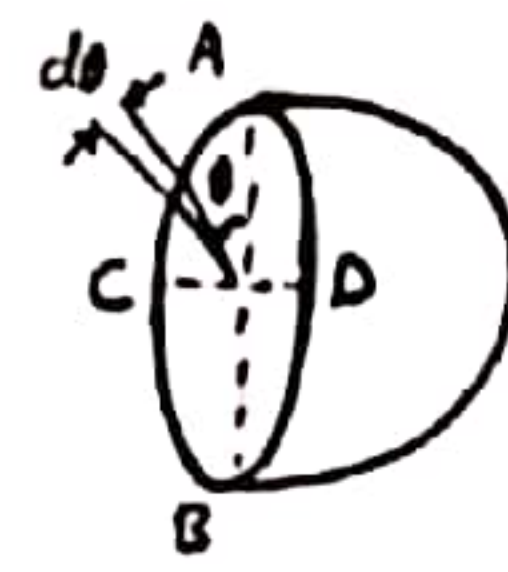
در همان ترتیب به متغیر N_{θ} رسید:

$$N_{\theta} = -N_{\varphi} - a\delta t \cos\theta \cdot \sin\varphi$$

$$\Rightarrow N_{\theta} = -\cos\theta \left[a\delta t \sin\varphi + \frac{-2a\delta t (2\cos^5\varphi - 4\cos^3\varphi + \cos\varphi + 1) + 4\cos\varphi (c_1 - c_2) + 4c_2}{8 \sin\varphi (-1 + \cos^2\varphi)} \right]$$

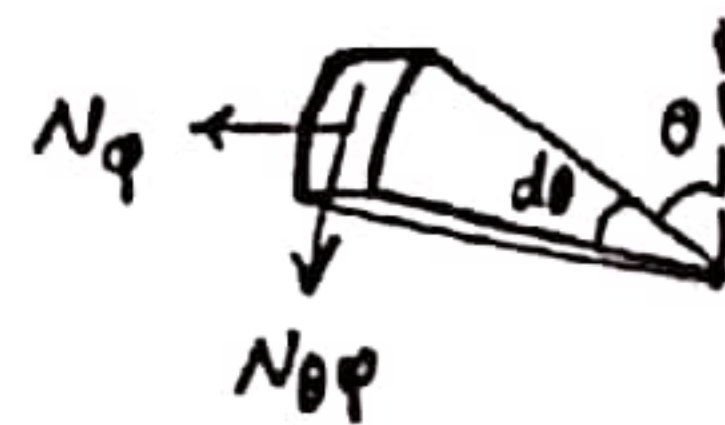
در صفحه عمودی، برای اعمال شرایط نرسی، با توجه به اینکه $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ، مر باشد، خواصیم داشت:

$$\begin{cases} N_{\varphi} = \cos \theta \left[\frac{-1}{4} a \delta t + \frac{1}{2} c_2 \right] \\ N_{\theta\varphi} = \sin \theta \left[\frac{-1}{4} a \delta t + \frac{1}{2} (c_1 - c_2) \right] \\ N_{\theta} = \cos \theta \left[\frac{-5}{4} a \delta t + \frac{1}{2} c_2 \right] \end{cases}$$



$$\sum F_{AB} = 0$$

$$\sum M_{CD} = 0$$



$$\underline{\text{B.C.}} \quad \begin{cases} \sum F_{AB} = 0 & \textcircled{1} \\ \sum M_{CD} = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \rightarrow \int_0^{2\pi} N_{\varphi} \cdot a d\theta \cdot a \cos \theta = 0 \Rightarrow a^2 \int_0^{2\pi} \cos \theta \left(\frac{-1}{4} a \delta t + \frac{1}{2} c_2 \right) d\theta = 0 \Rightarrow \left(\frac{-1}{4} a \delta t + \frac{1}{2} c_2 \right) \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{4} a \delta t + \frac{1}{2} c_2 = 0 \Rightarrow \underline{c_2 = \frac{1}{2} a \delta t}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow \int_0^{2\pi} N_{\theta\varphi} \cdot a d\theta \cdot \sin \theta = - \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \delta t \cos \theta \sin \varphi \cdot (\sin \varphi \cos \theta) \cdot a^2 \sin \varphi d\varphi d\theta \Rightarrow$$

$$a \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \left(\frac{-1}{4} a \delta t + \frac{c_1 - c_2}{2} \right) d\theta = - \delta t a^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^3 \varphi d\varphi d\theta \Rightarrow$$

$$\left(\frac{-1}{4} a \delta t + \frac{c_1 - c_2}{2} \right) \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = - \delta t a \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^3 \varphi d\varphi d\theta \Rightarrow$$

$$\left(\frac{-1}{4} a \delta t + \frac{c_1 - c_2}{2} \right) \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = - \delta t a \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\frac{-3}{4} \cos \varphi + \frac{\cos 3\varphi}{12} \right]_0^{\pi/2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{-1}{4} a \delta t + \frac{c_1 - c_2}{2} \right) \pi = - \delta t a \cdot \pi \cdot \left[\frac{+3}{4} - \frac{1}{12} \right] \Rightarrow \frac{-1}{4} a \delta t + \frac{c_1 - c_2}{2} = - \frac{2}{3} \delta t a \Rightarrow$$

$$\frac{c_1 - c_2}{2} = \frac{-5}{12} a \delta t \Rightarrow c_1 = 2 \left(\frac{-5}{12} a \delta t + \frac{1}{4} a \delta t \right) = \underline{\frac{-1}{3} a \delta t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{\varphi} = \frac{-\cos \theta}{8 \sin \varphi (-1 + \cos^2 \varphi)} \left[-2a \delta t (2 \cos^5 \varphi - 4 \cos^3 \varphi + \cos \varphi + 1) - \frac{10}{3} a \delta t \cos \varphi + 2a \delta t \right] \\ N_{\theta\varphi} = \frac{-\sin \theta}{8 \sin \varphi (-1 + \cos^2 \varphi)} \left[-2a \delta t (2 \cos^4 \varphi - 4 \cos^2 \varphi + \cos \varphi + 1) + \frac{2}{3} a \delta t \cos \varphi - \frac{10}{3} a \delta t \right] \\ N_{\theta} = -\cos \theta \left[a \delta t \sin \varphi + \frac{-2a \delta t (2 \cos^5 \varphi - 4 \cos^3 \varphi + \cos \varphi + 1) - \frac{10}{3} a \delta t \cos \varphi + 2a \delta t}{8 \sin \varphi (-1 + \cos^2 \varphi)} \right] \end{cases}$$

محکم در دستارستان اینک که غیر متجانس عبارت زیر را داشته:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_\varphi) + r_1 N_{\varphi, \theta} - r_1 N_\theta \cos \varphi + r_0 r_1 P_\varphi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_{\theta \varphi}) + r_1 N_{\theta, \theta} + r_1 N_{\theta \varphi} \cos \varphi + r_0 r_1 P_\theta = 0 \\ \frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} + P_z = 0 \end{cases}$$

باقیم در حد اولی بر باقیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_\varphi) + N_{\varphi, \theta} - N_\theta \cos \varphi + r_0 P_\varphi = 0 \\ \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_{\theta \varphi}) + N_{\theta, \theta} + N_{\theta \varphi} \cos \varphi + r_0 P_\theta = 0 \\ \frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} + P_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \chi \equiv \varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \chi} \\ r_1 = \infty, \quad r_0 = \chi \sin \alpha, \quad r_2 = \chi \tan \alpha \end{cases}$$



در چینه منفرجه عبارت زیر معادله است:

باقیم در حد اولی بر باقیم داشت:

$$P_\varphi = P_\theta = 0, \quad P_z = P \cos \theta \sin \varphi = P \cos \theta \cos \alpha$$

در نتیجه باقیم در حد اولی بر باقیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \chi} (\chi \sin \alpha N_\chi) + N_{\theta \chi, \theta} - N_\theta \sin \alpha = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \chi} (\chi \sin \alpha N_{\theta \chi}) + N_{\theta, \theta} + N_{\theta \chi} \sin \alpha = 0 \\ \frac{N_\theta}{\chi \tan \alpha} + P \cos \theta \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_\theta = -\chi P \cos \theta \sin \alpha \end{cases}$$

باقیم در حد اولی بر باقیم داشت:

$$\begin{cases} N_\chi \sin \alpha + \chi N_{\chi, \chi} \sin \alpha + N_{\theta \chi, \theta} + \chi P \cos \theta \sin^2 \alpha = 0 \\ N_{\theta \chi} \sin \alpha + \chi N_{\theta \chi, \chi} \sin \alpha + \chi P \sin \theta \sin \alpha + N_{\theta \chi} \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

باقیم در حد اولی بر باقیم داشت:

$$\begin{cases} N_\chi + \chi N_{\chi, \chi} + N_{\theta \chi, \theta} \frac{1}{\sin \alpha} = -\chi P \cos \theta \sin \alpha \\ 2N_{\theta \chi} + \chi N_{\theta \chi, \chi} = -\chi P \sin \theta \end{cases}$$

باقیم در حد اولی بر باقیم داشت:

$$N_{\theta \chi, \chi} + \frac{2}{\chi} N_{\theta \chi} = -P \sin \theta$$

$$P = \exp \left(\int \frac{2 d\chi}{\chi} \right) = \exp (2 \ln \chi) = \chi^2 \Rightarrow \chi^2 N_{\theta \chi} = \int -\chi^2 P \sin \theta d\chi + C_1 = -P \frac{\chi^3}{3} \sin \theta + C_1$$

$$\Rightarrow N_{\theta \chi} = \frac{-P \chi}{3} \sin \theta + \frac{C_1}{\chi^2}$$

$$\text{at } \chi = L_1 \Rightarrow N_{\theta \chi} = 0 \Rightarrow \frac{-P L_1}{3} \sin \theta + \frac{C_1}{L_1^2} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{P L_1^3}{3} \sin \theta \Rightarrow N_{\theta \chi} = \frac{P}{3} \sin \theta \left(\frac{L_1^3}{\chi^2} - \chi \right)$$

$$\Rightarrow N_{x\theta} = \frac{P}{3} \left(\frac{L_1^3 - x^3}{x^2} \right) \sin \theta$$

حال معادله N_x را نیز مشابه بنویس:

$$N_x + x N_{x,x} + \frac{P}{3} \left(\frac{L_1^3 - x^3}{x^2} \right) \cos \theta \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = -x P \cos \theta \cdot \sin \alpha \Rightarrow \div x \Rightarrow$$

$$N_{x,x} + \frac{1}{x} N_x = -P \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} \left[\sin^2 \alpha + \frac{L_1^3 - x^3}{3x^2} \right]$$

$$\rho = \exp \left(\int \frac{dx}{x} \right) = \exp(\ln x) = x \Rightarrow x N_x = \int -P x \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} \left[\sin^2 \alpha + \frac{L_1^3 - x^3}{3x^2} \right] dx + c_2$$

$$\Rightarrow x N_x = -P \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} \left[\frac{x^2}{2} \sin^2 \alpha - \frac{L_1^3}{3x} - \frac{x^2}{6} \right] + c_2$$

$$\Rightarrow N_x = -P \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} \left[\frac{x}{2} \left(\frac{-1}{3} + \sin^2 \alpha \right) - \frac{L_1^3}{3x^2} \right] + \frac{c_2}{x}$$

$$\text{at } x = L_1 \Rightarrow N_x = 0 \rightarrow 0 = -P \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} \left[\frac{L_1}{2} \left(\frac{-1}{3} + \sin^2 \alpha \right) - \frac{L_1}{3} \right] + \frac{c_2}{L_1} \Rightarrow c_2 = -P \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} \left[\frac{+L_1^2}{2} \cdot \cos^2 \alpha \right]$$

$$\leadsto N_x = -P \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} \left[\frac{x}{2} \left(\frac{-1}{3} + \sin^2 \alpha \right) - \frac{L_1^3}{3x^2} \right] - P \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} \cdot \frac{L_1^2}{x} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{2}$$

$$\Rightarrow N_x = -P \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} \left[\frac{x^3 - L_1^3}{3x^2} + \frac{L_1^3 - x^2}{2x} \cos^2 \alpha \right]$$

تنش حاصل از پیاده سازی نیز عبارت زیر را بنویس:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{N_x}{t} = -\frac{P \cos \theta}{t \sin \alpha} \left[\frac{x^3 - L_1^3}{3x^2} + \frac{L_1^3 - x^2}{2x} \cos^2 \alpha \right] \\ \sigma_\theta = \frac{N_\theta}{t} = -\frac{P x}{t} \cos \theta \cdot \sin \alpha \\ \sigma_{x\theta} = \frac{N_{x\theta}}{t} = \frac{P}{3t} \left(\frac{L_1^3 - x^3}{x^2} \right) \sin \theta \end{cases}$$

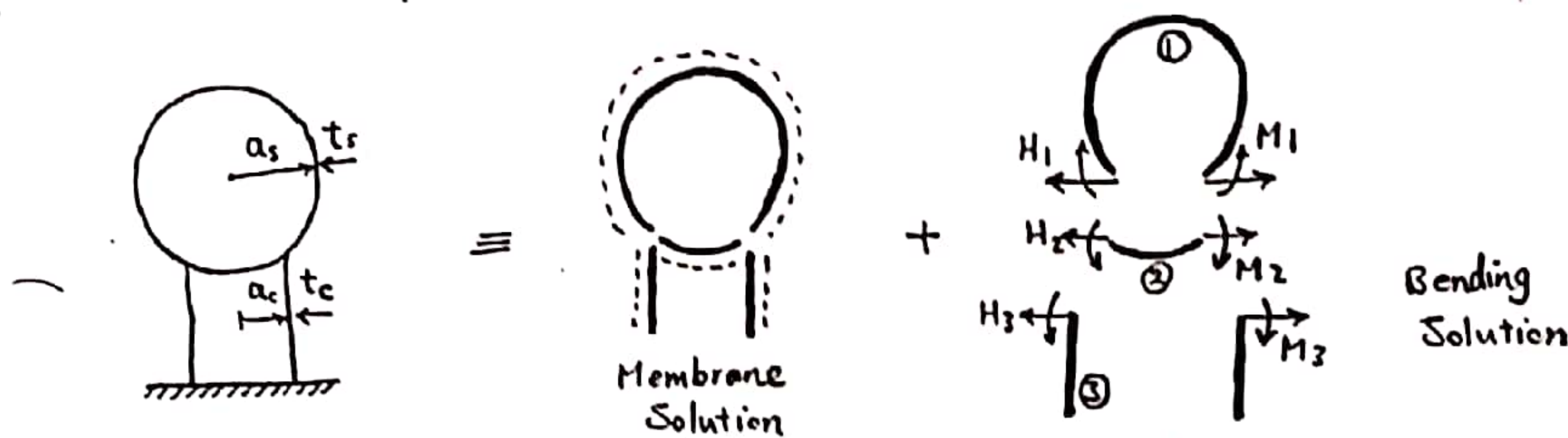
$$\lambda_c = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{a_c t_c}}, \quad \lambda_s = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \cdot \sqrt{\frac{a_s}{t_s}}$$

$$\begin{cases} \nu = 0.3, \quad E = 2 \times 10^5 \left(\frac{N}{mm^2} \right) \\ a_s = 1000 \text{ (mm)}, \quad t_s = 20 \text{ (mm)} \\ a_c = 500 \text{ (mm)}, \quad t_c = 10 \text{ (mm)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_c = 18.173 \left(\frac{1}{m} \right) \\ \lambda_s = 9.089 < 10 \end{cases}$$

باقی به عدد بدست آمده برای λ برآورد گشت که روش تعویب دلخواه، بصورت تقریبی قابل استفاده است و برای استوانه نیز طریقی بکار برده است:

$$L_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} = 0.3456 \text{ (m)} = 345.6 \text{ (mm)}$$

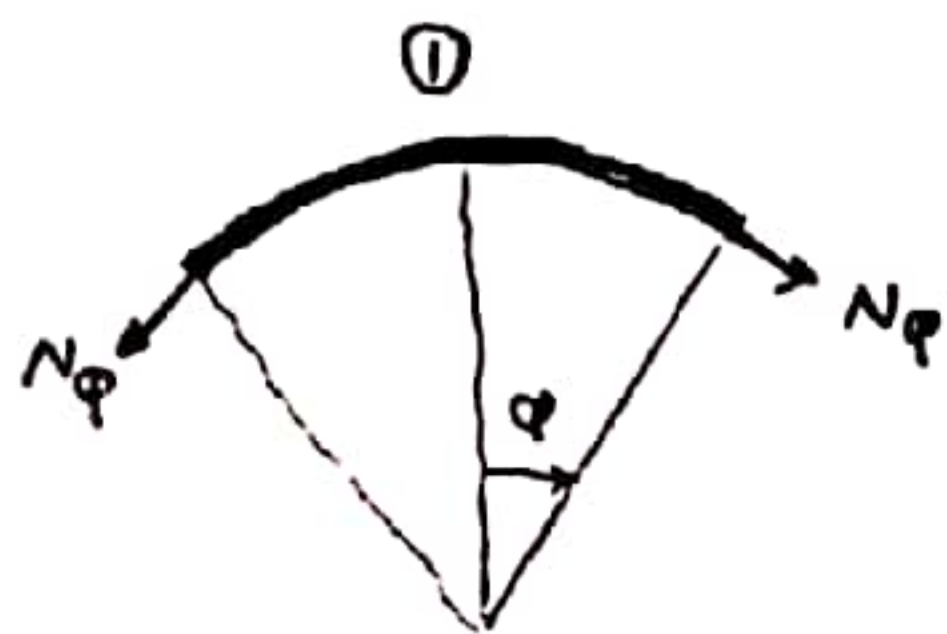
جواب سوال ۲۳ الف -



$$\begin{cases} \frac{d}{d\varphi} (r_0 N_\varphi) - r_1 N_\theta \cos \varphi + r_0 r_1 P_\varphi = 0 & \text{or } N_\varphi = \frac{-F}{2\pi r_0 \sin \varphi} \\ \frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} + P_\varphi = 0 \end{cases}$$

برای پوسته دارای بارهای متناوب داریم که:

تغایر N_φ ، N_θ برای قسمت ① از شکل بصورت زیر معادله می‌گردد:



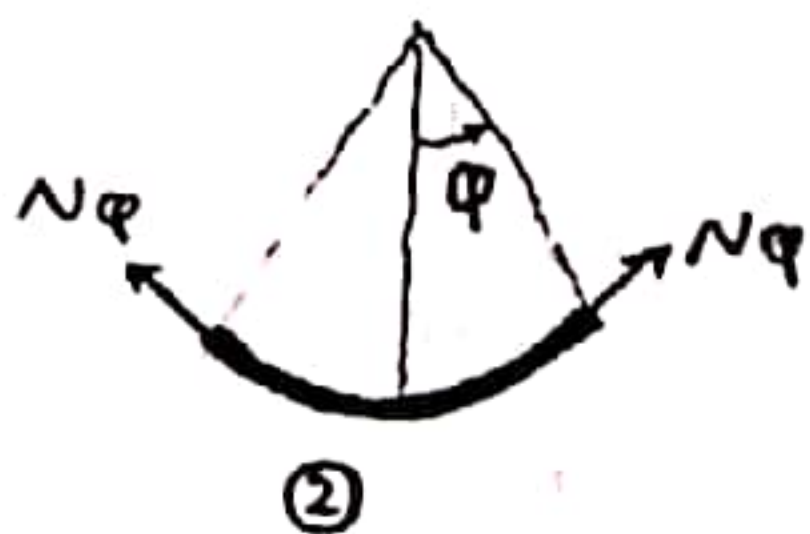
$$P_\varphi = -\delta a_s (1 - \cos \varphi)$$

$$F = - \int_0^\varphi P_\varphi \cos \varphi (2\pi a_s) a_s d\varphi = 2\pi a_s^3 \delta \left(\sin \varphi - \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right)$$

$$\text{برای } r_0: r_0 = a_s \sin \varphi \Rightarrow N_\varphi = -a_s^2 \delta \left(\frac{1}{\sin \varphi} - \frac{\varphi}{2 \sin^2 \varphi} - \frac{\cot \varphi}{2} \right)$$

$$\text{برای } r_1: r_1 = r_2 = a_s \Rightarrow N_\varphi + N_\theta = -P_\varphi a_s \Rightarrow N_\theta = a_s^2 \delta \left(1 - \cos \varphi + \frac{1}{\sin \varphi} - \frac{\varphi}{2 \sin^2 \varphi} - \frac{\cot \varphi}{2} \right)$$

تغایر N_φ ، N_θ برای قسمت ② از شکل نیز بصورت زیر معادله می‌گردد:



$$P_\varphi = -\delta a_s (1 + \cos \varphi)$$

$$F = - \int_0^\varphi P_\varphi \cos \varphi (2\pi a_s) a_s d\varphi = 2\pi a_s^3 \delta \left(\sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow N_\varphi = -a_s^2 \delta \left(\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{\varphi}{2 \sin^2 \varphi} + \frac{\cot \varphi}{2} \right)$$

$$N_\varphi + N_\theta = -P_\varphi a_s \Rightarrow N_\theta = a_s^2 \delta \left(1 + \cos \varphi + \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{\varphi}{2 \sin^2 \varphi} + \frac{\cot \varphi}{2} \right)$$

برای قسمت ⑤ از شکل داریم که: (قسمت استوانه اول)

$$N\varphi = \frac{-F}{2\pi a_c(1)} = \frac{-\frac{4}{3}\pi a_s^3 \delta}{2\pi a_c} = -\frac{2}{3} \frac{\delta a_s^3}{a_c}$$

$$\frac{N\varphi}{r_1} + \frac{N\theta}{r_2} + P_2 = 0 \Rightarrow N\theta = -a_c T_c = 0$$

علت اینکه نتوانیم در داخل استوانه دوم نیرو وارد، مقدار $N\theta$ آن صفر می‌گردد.

در این قسمت باید مقدارهای δ , V و اجزای مل‌های تنش و غشایی را حساب نمود. مقادیر که برای مل‌های غیرتیریس باشند:

$$\delta_s = a_c \epsilon_\theta = \frac{a_c}{E t_s} (N\theta - V N\varphi)_s \quad \text{①}$$

$$\delta_c = a_c \epsilon_\theta = \frac{a_c}{E t_c} (N\theta - V N\varphi)_c \quad \text{②}$$

مقادیر δ , V برای مل‌های تیریس نیز بصورت زیر حساب می‌گردند:

$$\delta_s = \frac{2\lambda_s^2 M \sin \alpha}{E t_s} + \frac{2a_s \lambda_s H \sin \alpha}{E t_s}$$

$$V_s = \frac{-4\lambda_s^3 M}{E t_s a_s} - \frac{2\lambda_s^2 \sin \alpha \cdot H}{E t_s}$$

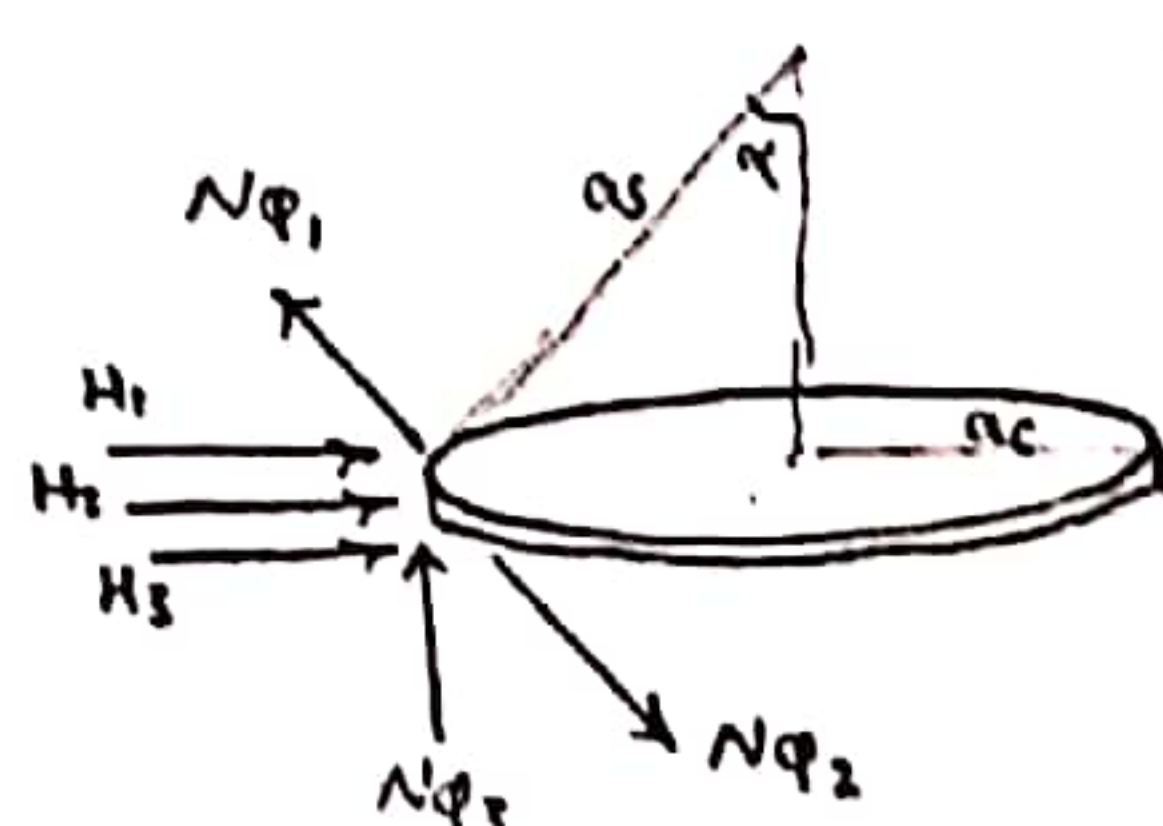
$$\delta_c = \frac{2H a_c^2 \lambda_c}{E t_c} + \frac{2M \lambda_c^2 a_c^2}{E t_c}$$

$$V_c = \frac{2H \lambda_c^2 a_c^2}{E t_c} + \frac{4M \lambda_c^3 a_c^2}{E t_c}$$

شرایط پیوسته باید به گونه زیر اعمال گردند:

$$(\delta_1)_{total} = (\delta_2)_{total} = (\delta_3)_{total}, \quad V_1 = V_2 = V_3$$

در معادله زیر چهار معادله بالا، بصورتاً 1 معادله و 2 معادله را می‌سازند.



$$\sin \alpha = \frac{a_c}{a_s}$$

$$\text{قوانین نیروهای قائم: } (N\varphi_1 - N\varphi_2) \sin \alpha + N\varphi_3 = 0$$

$$\text{قوانین نیروهای افقی: } (N\varphi_1 - N\varphi_2) \cos \alpha - H_1 - H_2 - H_3 = 0$$

$$\text{قوانین گشتاورها: } M_1 - M_2 - M_3 = 0$$

قابل ذکر است که معادله اول یک رابطه بین است و از معادله دوم و سوم می‌توان معادلات اصلی استفاده کرد که عبارتند از:

$$\begin{cases} H_1 + H_2 + H_3 = [(N\varphi_1)_{\varphi=\pi-\alpha} - (N\varphi_2)_{\varphi=\alpha}] \cos \alpha = a_s^2 \delta \frac{\pi \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} \\ M_1 = M_2 + M_3 \end{cases}$$

مقادیر δ غشایی بصورت زیر می‌باشد:

$$\text{مل غشایی: } \text{②} \rightarrow \delta_c = \frac{a_c}{E t_c} \left(0 + \frac{2V}{3} \cdot \frac{\delta a_s^3}{a_c} \right) = \frac{2V \delta a_s^3}{3 E t_c}$$

$$\text{مل غشایی: } \text{①} \rightarrow \delta_{s1} = \frac{a_c}{E t_s} [N\theta_1 - V N\varphi_1] = \frac{a_s^2 a_c \delta}{E t_s} \left[1 - \cos \varphi + (1+V) \left(\frac{1}{\sin \varphi} - \frac{\varphi}{2 \sin^2 \varphi} - \frac{C \cot \varphi}{2} \right) \right]$$

$$\delta_{s2} = \frac{a_c}{E t_s} [N\theta_2 - V N\varphi_2] = \frac{a_s^2 a_c \delta}{E t_s} \left[1 + \cos \varphi + (1+V) \left(\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{\varphi}{2 \sin^2 \varphi} + \frac{C \cot \varphi}{2} \right) \right]$$

$$(\delta_1)_{total} = \frac{a_s^2 a_c \delta}{E t_s} \left[1 - \cos \varphi + (1+V) \left(\frac{1}{\sin \varphi} - \frac{\varphi}{2 \sin^2 \varphi} - \frac{C \cot \varphi}{2} \right) \right] + \frac{2\lambda_s^2 M_1 \sin \alpha}{E t_s} + \frac{2a_s \lambda_s H_1 \sin \alpha}{E t_s} \quad \text{④}$$

$$(\delta_2)_{total} = \frac{a_s^2 a_c \delta}{E t_s} \left[1 + \cos \varphi + (1+V) \left(\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{\varphi}{2 \sin^2 \varphi} + \frac{C \cot \varphi}{2} \right) \right] + \frac{2\lambda_s^2 M_2 \sin \alpha}{E t_s} + \frac{2a_s \lambda_s H_2 \sin \alpha}{E t_s} \quad \text{⑤}$$

$$(\delta_3)_{total} = \frac{2V \delta a_s^3}{3 E t_c} + \frac{2H_3 a_c^2 \lambda_c}{E t_c} + \frac{2M_3 \lambda_c^2 a_c^2}{E t_c} \quad \text{⑥}$$

قابل ذکر است که δ_1 همان $\pi - \alpha$ است.

$$V_1 = \frac{-4\lambda_s^3 M_1}{Et_s a_s} - \frac{2\lambda_s^2 \sin \alpha \cdot H_1}{Et_s} \quad [f]$$

$$V_2 = \frac{-4\lambda_s^3 M_2}{Et_s a_s} - \frac{2\lambda_s^2 \sin \alpha \cdot H_2}{Et_s} \quad [d]$$

$$V_3 = \frac{2H_1 \lambda_c^2 a_c^2}{Et_c} + \frac{4M_3 \lambda_c^3 a_c^2}{Et_c} \quad [a]$$

بدین ترتیب معادلات به گونه زیر خواهند بود:

$$\begin{cases} V_1 = V_2 \\ V_2 = V_3 \\ (\delta_1)_{total} = (\delta_2)_{total} \\ (\delta_2)_{total} = (\delta_3)_{total} \\ H_1 + H_2 + H_3 = a_s^2 \delta \pi \cdot \frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} \\ M_1 = M_2 + M_3 \end{cases}$$

با جایگزینی معادلات فوق می توان به 1 معادله ساده تر زیر دست یافت:

$$\begin{cases} (H_1 - H_2) \sin \alpha + \frac{2\lambda_s}{a_s} (M_1 - M_2) = 0 \\ \frac{\lambda_s^2 \sin \alpha}{t_s} H_2 + \frac{\lambda_c^2 a_c^2}{t_c} H_3 + \frac{2\lambda_s^3}{t_s a_s} M_2 + \frac{2\lambda_c^3 a_c^2}{t_c} M_3 = 0 \\ (H_1 - H_2) a_s \lambda_s^2 \sin \alpha + (M_1 - M_2) \lambda_s^2 \sin \alpha = a_s^2 a_c^2 \gamma \left[\cos \varphi + (1+\nu) \left(\frac{\varphi}{2 \sin^2 \varphi} + \frac{\cot \varphi}{2} \right) \right] \\ \frac{a_s \lambda_s^2 \sin \alpha}{t_s} H_2 - \frac{a_c^2 \lambda_c}{t_c} H_3 + \frac{\lambda_s^2 \sin \alpha}{t_s} M_2 - \frac{\lambda_c^2 a_c^2}{t_c} M_3 = \frac{a_s^2 a_c^2 \gamma}{2 t_s} \left[\frac{2 a_s t_s \nu}{3 a_c t_c} + 1 + \cos \varphi + (1+\nu) \left(\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{\varphi}{2 \sin^2 \varphi} + \frac{\cot \varphi}{2} \right) \right] \\ H_1 + H_2 + H_3 = a_s^2 \delta \pi \frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} \\ M_1 - M_2 - M_3 = 0 \end{cases}$$

$$[\bar{K}] \{\Phi\} = \{f\} \quad , \quad \{\Phi\} = [\bar{K}]^{-1} \{f\} \quad , \quad \{\Phi\}^T = \langle H_1 \ H_2 \ H_3 \ M_1 \ M_2 \ M_3 \rangle$$

برای محاسبه 1 پارامتر $\{\Phi\}$ برنامه ای در محیط MATLAB نوشته شده است که خود به خود نتایج آن در صفحه می آید.