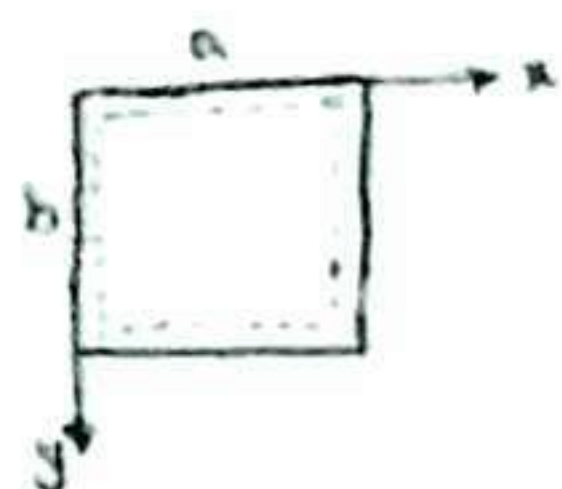


حل معادلات ورق چهار گوش به شیوه نیم تحلیلی

روش Navier

این روش تنها برای حالتی که ورق دارای یک لبه آزاد باشد و سه لبه دیگر

شرط مرزی در این وضعیت صورت بگیرد



$$\begin{cases} x=0, a : W=0, M_x=0 \\ y=0, b : W=0, M_y=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x=0, a : W=0, W_{,xx}=0 \\ y=0, b : W=0, W_{,yy}=0 \end{cases}$$

لذا فرم پاسخ برای ورق به گونه زیر تعیین می شود

$$W(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1)$$

مگر آنکه دوست رابطه $\nabla^4 W = \frac{P}{D}$ سازگار ندارند با P را نیز به کسینوس مشابه گزینیم

$$P(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2)$$

برای یافتن W_{mn} یا P_{mn} از مفهوم جدایش متغیرها استفاده می کنیم

$$P(x,y) = F(x) \cdot G(y)$$

بر پایه گزینش موردی حواله می دهیم

$$P(x,y) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{a} \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi y}{b} \right)$$

$$\rightarrow P(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{a} \int_0^a F(x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \right) \cdot \left(\frac{2}{b} \int_0^b G(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \right) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\Rightarrow P(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b P(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \right) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\Rightarrow P_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b P(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

پس (1) با توجه به برآورده صورت شرط مرزی، شامل حود پاسخ عمومی می شود

پس با جایگزینی رابطه (1) در (2) درجه 4 خواهیم داشت

$$\nabla^4 W - \frac{P}{D} = 0 \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ W_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] - \frac{P_{mn}}{D} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0$$

$$\Rightarrow W_{mn} = \frac{P_{mn}}{\pi^4 D \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (3) \quad (P \text{ متغیر وابسته به } x, y \text{ را به صورت متغیر جدایی در آورده})$$

درین حالت بار گسترده می نویسیم

برای ورق تحت بار گسترده می نویسیم به سمت P_0 خواهیم داشت

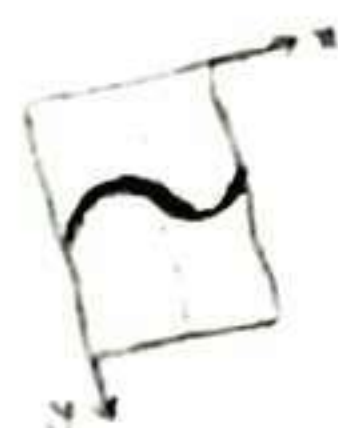
$$P_{mn} = \frac{4P_0}{\pi^2 mn} (1 - \cos(m\pi)) \cdot (1 - \cos(n\pi)) = \frac{4P_0}{\pi^2 mn} [1 - (-1)^m] \cdot [1 - (-1)^n]$$

بنابراین P_{mn} تنها برای مقادیر فرد m, n غیر صفر است(برای m, n گشتی دهانه نیم موج های سینوسی است)

$$\text{در } m, n \rightarrow P_{mn} = \frac{16P_0}{\pi^2 mn}$$

از رابطه (3) خواهیم داشت

$$W = \frac{16P_0}{\pi^6 D} \sum_{m, n \text{ فرد}} \sum_{n \text{ فرد}} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 \cdot mn}$$



درج دوم گزینش نیست! متغیر جدایی دارد

$$W_{mn} = \frac{16P_0}{\pi^6 mn D \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}$$

فیدو کشیدار سینم در مرکز دایره دایره در وسط

$$W_{max} = \frac{16 P_0}{\pi^6 D} \sum_{m,j} \sum_{n,j} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2}$$

$$M_x = \frac{16 P_0}{\pi^4} \sum_{m,j} \sum_{n,j} \frac{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \nu \left(\frac{n}{b}\right)^2}{mn \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

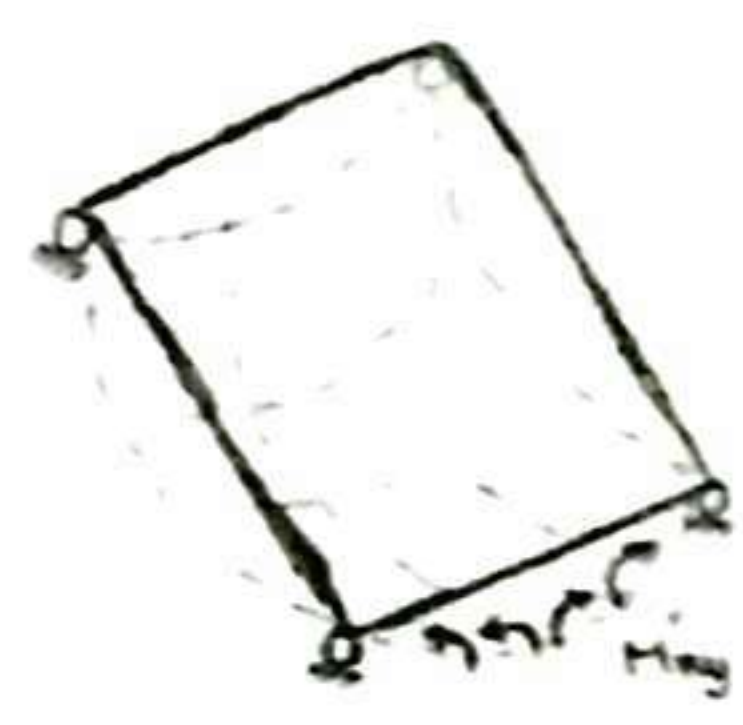
$$M_y = \frac{16 P_0}{\pi^4} \sum_{m,j} \sum_{n,j} \frac{\nu \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}{mn \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

M_{xy} ناشی از تغییرات است که یکسان است در تمام دایره
 اعمالی این یکسان است و در مرکز دارد

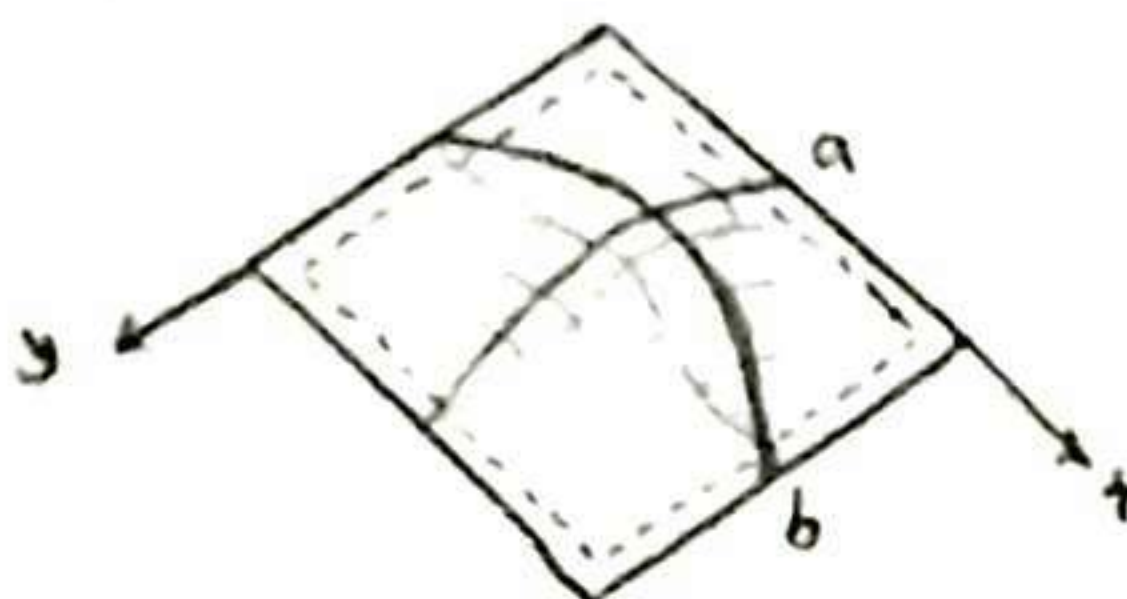
$$M_{xy} = - \frac{16 (1-\nu) P_0}{\pi^4 ab} \sum_{m,j} \sum_{n,j} \frac{1}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}$$

این M_{xy} مرکز دارد

نقطه نقطه



وزن تحت بار سینوسی



$$P(x,y) = P_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = P_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$W_{11} = W_{11} = \frac{P_{11}}{\pi^4 D \left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 \right]^2}$$

(نقشه W_{11} منقسم)

$$W(x,y) = \frac{P_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$M_x = \frac{P_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad , \quad M_y = \frac{P_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$M_{xy} = - \frac{P_0 (1-\nu)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 ab} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

فیدو کشیدار سینم در نقطه بیانی بدین آید:

$$W_{max} = \frac{P_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}$$

$$Q_x = \frac{P_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad , \quad Q_y = \frac{P_0}{\pi b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

$$V_x|_{x=a} = (Q_x + M_{xy,y})|_{x=a} = - \frac{P_0}{\pi a (a^{-2} + b^{-2})} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2-\nu}{b^2} \right) \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$V_y|_{y=b} = (Q_y + M_{xy,x})|_{y=b} = - \frac{P_0}{\pi b (a^{-2} + b^{-2})} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{a^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a}$$

از سوراخ نیز می توانید وارد بردن برابر است:

$$\int_0^a \int_0^b p(x,y) dx dy = \int_0^a \int_0^b P_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{4 P_0 ab}{\pi^2} \quad (4)$$

برای نیروهای کششی نیز عبارتند از:

$$2 \int_0^b V_x|_{x=a} dy + 2 \int_0^a V_y|_{y=b} dx = \frac{4 P_0 ab}{\pi^2} + \frac{8 P_0 (1-\nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \quad (5)$$

$$2 \int_0^b Q_y|_{x=a} dy + 2 \int_0^a Q_x|_{y=b} dx = \frac{4 P_0 ab}{\pi^2} \quad (6)$$

معادله است!



تعداد بارهای نیروهای برشی Q مابین برانید بارهای وارده برابر است. تعداد برانید نیروهای برشی هم Q است. $\therefore$ بارهای وارده و برانید برابر است.

$$+F_c = S M_{xy} \Big|_{x=a, y=b} = \frac{8 P_0 (1-\nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2}$$

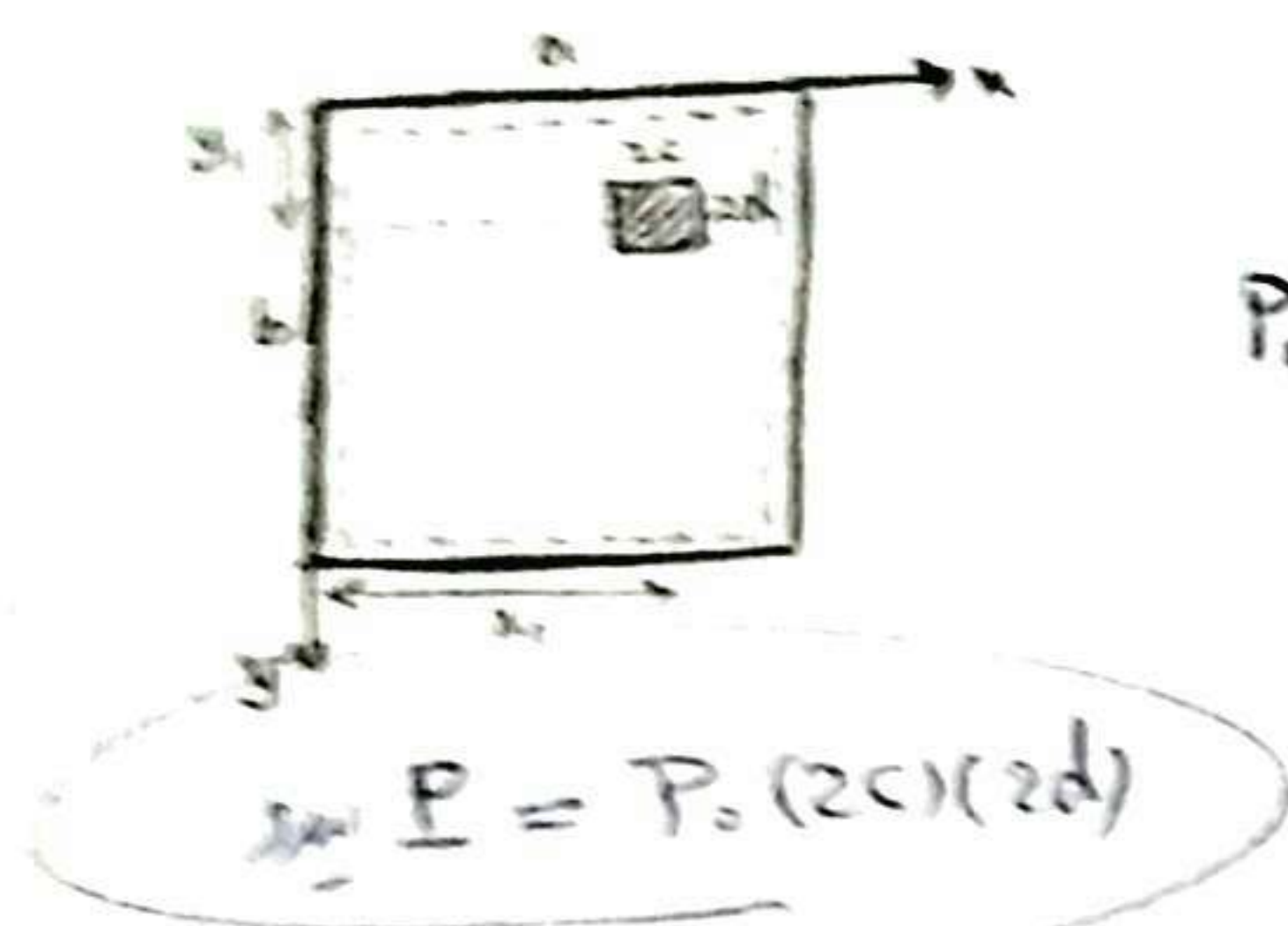
اگر a, b باشد آن $M_x < M_y$ خواهد شد:

$$(F_c)_{max} = \frac{8(M_y)_{max}}{t^2} = \frac{8 P_0}{\pi^2 t^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

$$(Z_{yt})_{max} = \frac{3 P_0}{\pi x b t \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{a^2}\right) = \frac{3 \nu y}{2 t}$$

عبارت دیگر از رابطه $(Z_{yt})_{max} = \frac{3 Q_y}{2 t}$ بدست می آید.

مثال: وزن تحت بار گسترده کنیولف معلوم باشد P_0 :



$$P_{mn} = \frac{+P_0}{abcd} \int_{y_1-d}^{y_1+d} \int_{x_1-c}^{x_1+c} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

$$= \frac{+P_0}{\pi^2 mncd} \cdot \sin \frac{m\pi x_1}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y_1}{b} \cdot \sin \frac{m\pi c}{a} \cdot \sin \frac{n\pi d}{b}$$

برای بار مستطین، پس از رفع ابعاد $(c, d \rightarrow \infty)$ خواهیم داشت:

$$P_{mn} = \frac{+P_0}{ab} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y_1}{b}$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{m\pi c}{a}}{m\pi c} = \frac{1}{a}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$w = \frac{+P_0}{\pi^2 D ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_1}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y_1}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

مثال: حل Navier برای ورق طایر بار مستطین

از روشین میل دادن ابعاد نامیه محدود تحت بار گسترده به عنوان استفاده نمود.

معادله بار گسترده بر پایه روشین هم به گونه زیر است:



$$P(x, y) = P \cdot \delta(x - x_1, y - y_1) = P \cdot \delta(x - x_1) \cdot \delta(y - y_1)$$

که در آن δ تابع دیراک است.

$$P = \int_0^a \int_0^b P(x, y) dx dy = P \int_0^a \int_0^b \delta(x - x_1) \cdot \delta(y - y_1) dx dy$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$P(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$P_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b P(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y_1}{b} \quad (در \ m, n)$$

$$\int_0^a f(x) \cdot \delta(x - x_1) dx = f(x_1) \quad : 0 \leq x_1 \leq a$$

$$\int_0^a \int_0^b f(x, y) \cdot \delta(x - x_1, y - y_1) dx dy = f(x_1, y_1)$$

$$w_{mn} = \frac{P_{mn}}{\pi^2 D \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \Rightarrow w = \frac{4P}{\pi^2 D ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_1}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y_1}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

نشان ممل Navier تحت گشتار متحرک



با توجه به اینکه ممل Navier تنها برای بار (نیرو) گسترده ارائه شده است گشتار مایه
و با در نظر گرفتن حالت پهنای ϵ میگیریم میروقت اوج آمار نیرو را بدست
برسانیم: $(p = \frac{M_1}{\epsilon})$

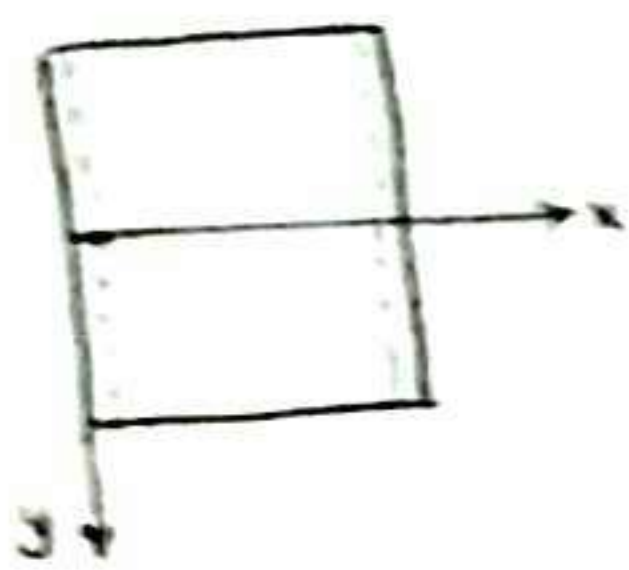
$$W = \frac{4M_1}{\lambda^4 D a b} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{j}{b}\right)^2\right]^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\epsilon} \left[\sin \frac{n\pi(x-\epsilon)}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} - \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right] \right\}$$

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x-\epsilon) - f(x)}{\epsilon} = -f'(x)$

$$W = \frac{4M_1}{\lambda^4 D a b} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{j}{b}\right)^2\right]^2} \cdot \frac{-\partial}{\partial x_1} \left[\sin \frac{n\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right]$$

$$W = \frac{-4M_1}{\lambda^4 D a b} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{j}{b}\right)^2\right]^2} \cos \frac{n\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

ممل = و جهات برای وقت پراگشت



در این ممل به سبب اینکه در آن نقاط از لحاظ هندسی و هر چه باشد
در این ممل به سبب اینکه در آن نقاط از لحاظ هندسی و هر چه باشد
این روش تنها زمانی که در یک نقطه از سازه متقابل نیرو وارد می شود کارایی دارد.
در این حالت معادله و معادلات بر یک نقطه از سازه وارد می شود. در این پایه ممل و جهات - فرم در این ممل

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (1)$$

با توجه به شرایط مرزی عبارتی در این ممل به سبب

$$\begin{cases} \text{at } x=0 \rightarrow W=0, W_{,xx}=0 \\ \text{at } x=a \rightarrow W=0, W_{,xx}=0 \end{cases}$$

در این ممل به سبب اینکه در آن نقاط از لحاظ هندسی و هر چه باشد

$$p(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (2)$$

$$P_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

برای بدست آوردن رابطه (1) و (2) به سبب اینکه در آن نقاط از لحاظ هندسی و هر چه باشد

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d^4 Y_n}{dy^4} - 2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 Y_n \right] \sin \frac{n\pi x}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{D} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{d^4 Y_n}{dy^4} - 2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 Y_n = \frac{P_n}{D}$$

با این Y_n و P_n در این ممل به سبب اینکه در آن نقاط از لحاظ هندسی و هر چه باشد

$$Y_n(y) = f_n(y) + k_n(y)$$

که در این ممل به سبب اینکه در آن نقاط از لحاظ هندسی و هر چه باشد

$$\frac{d^4 f_n}{dy^4} - 2 \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 f_n}{dy^2} + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 f_n = 0$$

در این ممل به سبب اینکه در آن نقاط از لحاظ هندسی و هر چه باشد

$$\left[r^2 - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]^2 = 0 \Rightarrow r = \pm \frac{n\pi}{a} \quad (\text{با دو تکرار})$$

$$\Rightarrow f_n(y) = A_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} + C_n y e^{\frac{n\pi y}{a}} + D_n y e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

$$f_m(y) = A_m \cdot \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + B_m \cdot \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_m y \cdot \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + D_m y \cdot \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$$

$$\Rightarrow w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + B_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_m y \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + D_m y \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

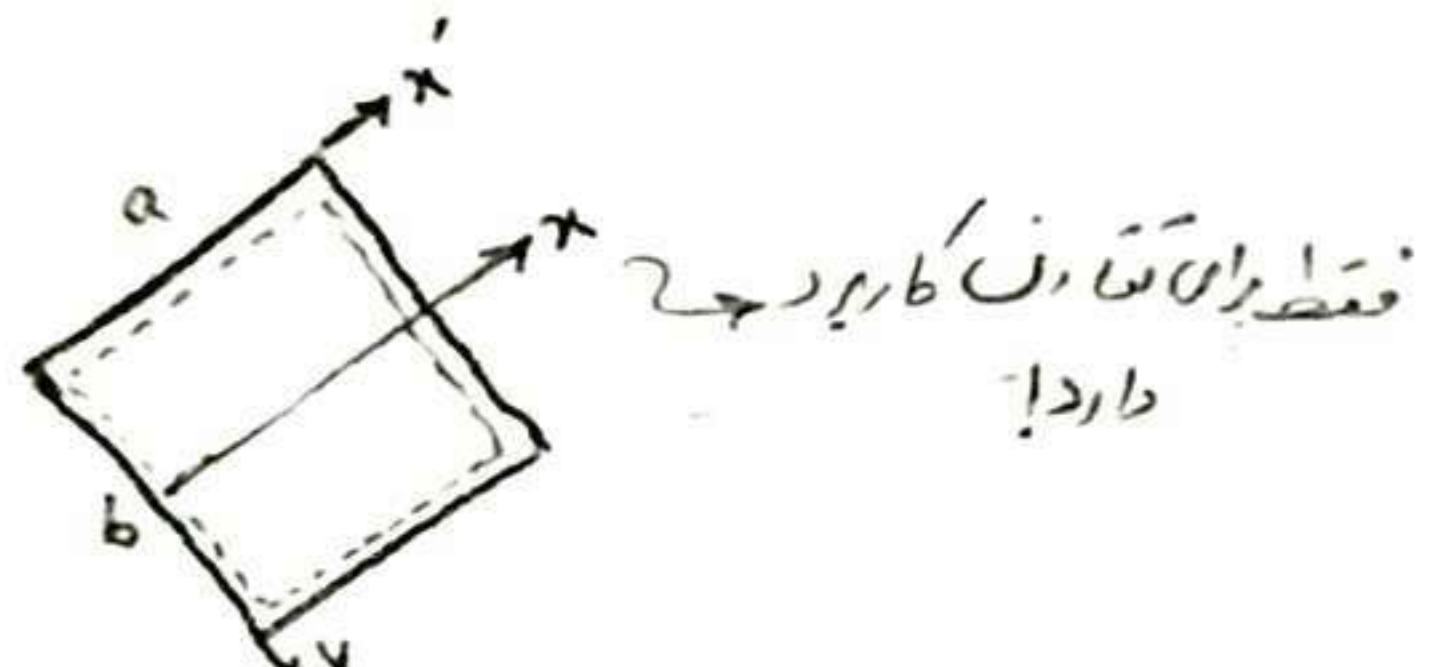
پایه‌های درونی قابل استفاده نیست!



Levy → بار در جهت y باید تغییر کند!

مقایسه دروس Navier و Levy:

- حل Navier تنها برای ورق‌های چهارگوشه مناسب است.
- همگرایی پاسخ دروس Levy سریع‌تر است. (چون تعداد جملات سری آن کمتر است).
- دروس Navier برای حل ورق‌های دارای بار گسترده دگواه مناسب است.
- دروس Levy برای حل ورق‌های دارای بار گسترده دگواه قابل اعمال نیست.



مثال: ورقچه گوشه‌های با یکدیگر به هم رسیده تحت بار گسترده یکنواخت

فرم پاسخ ~~در تمام جهات~~ در تمام جهات به گونه زیر است:

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + B_m \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + C_m y \sinh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) + D_m y \cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

پاسخ خصوصی از محل رابطه زیر تعیین می‌گردد:

$$w_p = \sum_{m=1}^{\infty} k_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$\frac{d^4 k_m}{dy^4} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 k_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 k_m = \frac{P_m}{D}$$

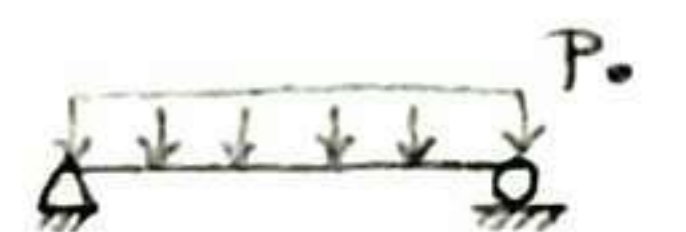
بنابراین اگر P_m به y وابسته نباشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$k_m = \frac{P_m a^4}{m^4 \pi^4 D}$$

برای بار گسترده یکنواخت بصورت $p(x,y) = P_0$ نیز خواهیم داشت:

$$P_m = \frac{4P_0}{m\pi} \Rightarrow k_m = \frac{4P_0 a^4}{m^5 \pi^5 D}$$

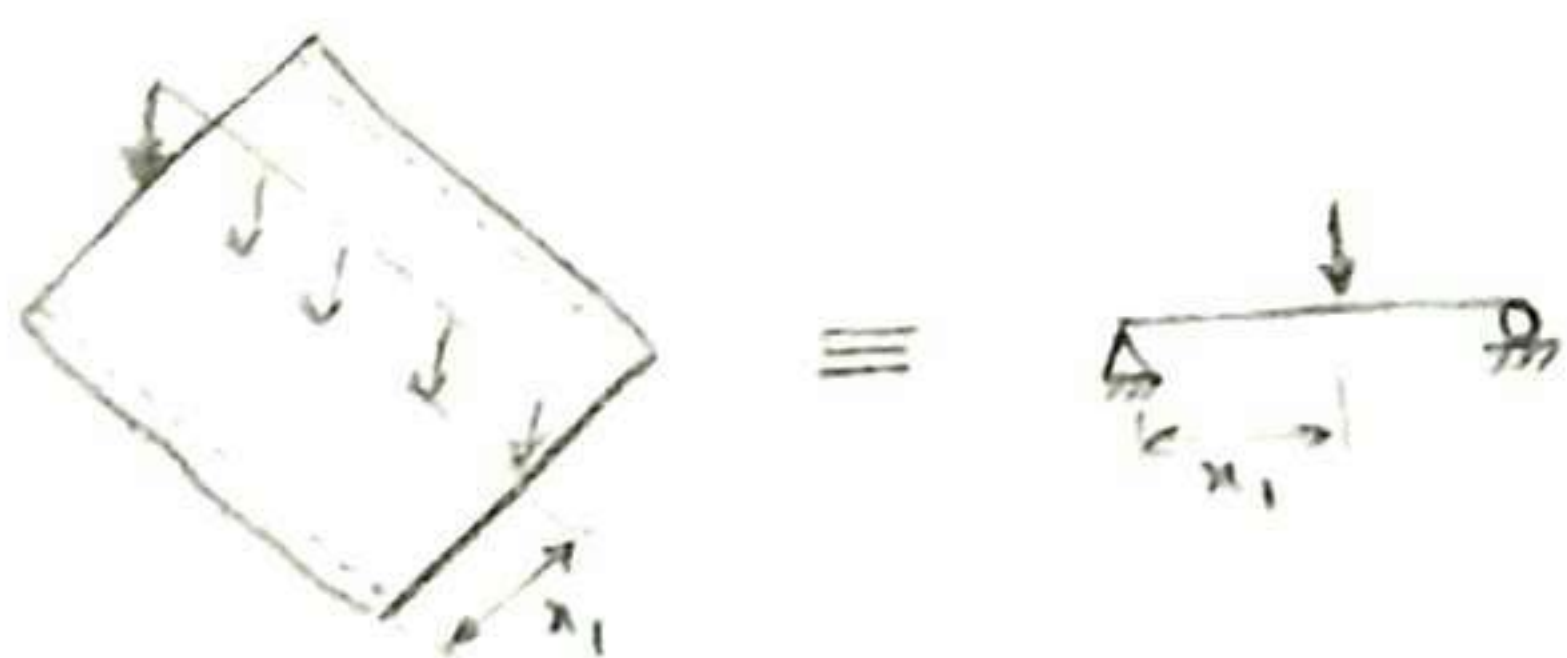
$$\Rightarrow w_p = \frac{4P_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} \equiv \frac{P_0}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3 x) \rightarrow \text{ماده فیزیکی است.}$$



پاسخ خصوصی بدست آمده، دقیقاً فیزیک تیر به طول a با بار گسترده گسترده

به شدت P_0 می‌باشد، اگر EI تیر با D جایگزین کرد. این مسئله را

می‌توان برای حالت‌های دیگر نیز بکار برد.



تقریب‌های در $w = w_h + w_p$ اعمال می‌شود، عبارت‌ها:

$$\text{محدود} \rightarrow w(y) = w(-y) \Rightarrow A_m = D_m = 0$$

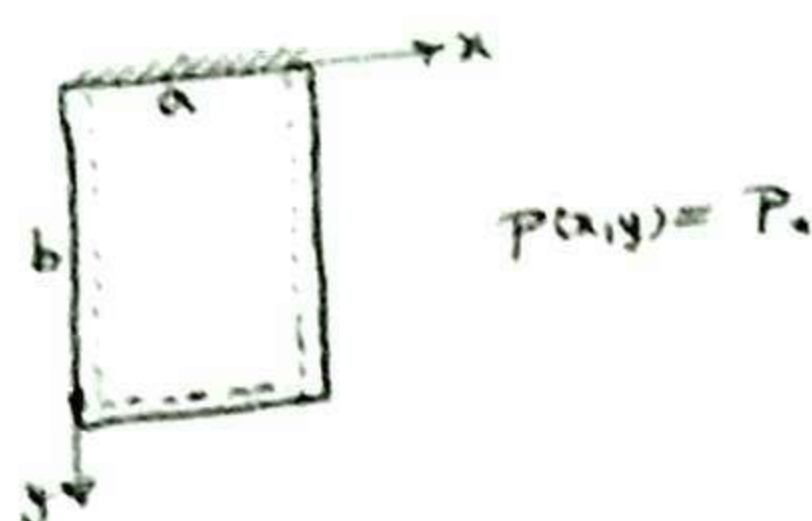
$$y = \frac{b}{2} \rightarrow w = 0, M_y = 0 (\rightarrow w_{,yy} = 0)$$

در نتیجه، پاسخ کلی بصورت زیر است:

$$w = \frac{4P_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \cdot \frac{2y}{b} \sinh \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \rightarrow w_{max} = \frac{5P_0 a^4}{384D} - \frac{4P_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \cdot \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \quad \left\{ \begin{array}{l} y=0 \\ x=\frac{a}{2} \end{array} \right.$$

مثال: ورق چگوش با ضخامت b ساده و یک تکیه‌گاه ثابت تحت بار گسترده کنیولفت



$$p(x,y) = P_0$$

فرم کلی پاسخ با همان قبل تفاوت ندارد:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m y \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m y \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{4P_0 a^4}{m^4 \pi^4 D} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

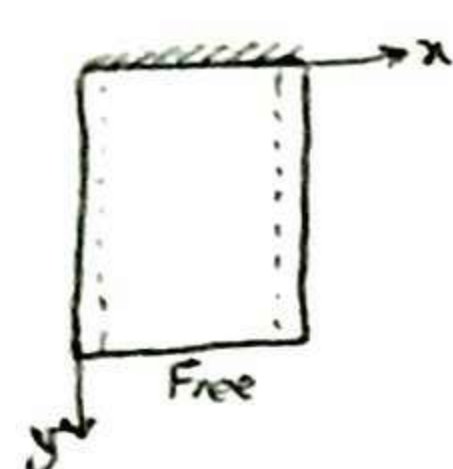
شرایط مرزی ضرورت بر حسب:

$$y=0 \rightarrow w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$y=b \rightarrow w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

با اعمال شرایط مرزی می‌توان ضرایب را محاسبه نمود.

مثال: ورق چگوش با ضخامت b ساده و یک تکیه‌گاه ثابت و یک سو آزاد تحت بار گسترده کنیولفت



$$p(x,y) = P_0$$

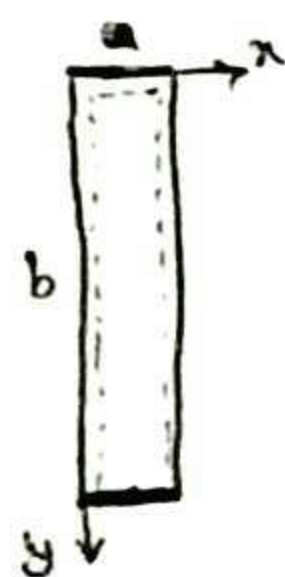
فرم کلی پاسخ دقیقاً مانند مثال قبل است اما ضرایب A_m تا D_m برای شرایط مرزی زیر تعیین می‌شوند:

$$y=0 \rightarrow w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$y=b \rightarrow M_y = 0, \quad V_y = 0 \rightarrow \begin{cases} w_{,yy} + \nabla^2 w_{,xx} = 0 \\ w_{,yyy} + (2-\nu) w_{,xxy} = 0 \end{cases}$$

مثال: ورق بلند (Strip) (یک بعد به جای دو بعد بگیرا باشد)

از پاسخ اولیه Levy داشتیم:



$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \left[(A'_m + C'_m y) e^{\frac{m\pi y}{a}} + (B'_m + D'_m y) e^{-\frac{m\pi y}{a}} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

با توجه به اینکه یک بعد ورق بسیار بزرگتر از بعد دیگر است، خواصیم داشت:

و آنجا که مقدار ضریب در لبه پائین باید معین باشد، آنگاه:

می‌توان نتیجه گرفت که:

$$A'_m = C'_m = 0$$

بنابراین اگر ورق تحت بار کنیولفت به شدت P_0 باشد آنگاه از شرایط مرزی دیگر خواصیم داشت:

$$y=0 \rightarrow w=0, \quad w_{,yy} = 0$$

در نتیجه پاسخ به فرم زیر خواهد شد:

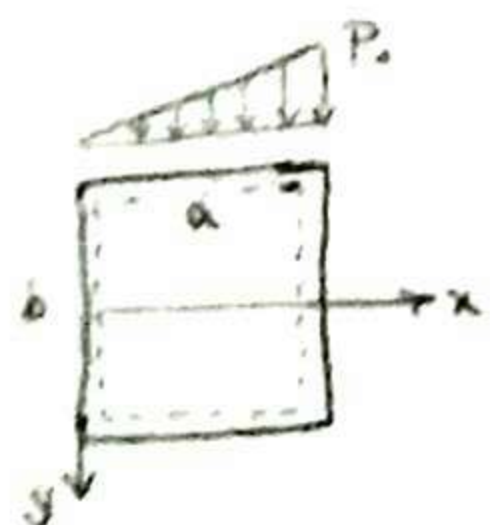
$$w = \frac{P_0 a^4}{24D} \left[\frac{x^4}{a^4} - 2 \frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a} - \frac{96}{\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(1 + \frac{m\pi y}{a} \right) e^{-\frac{m\pi y}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a} \right]$$

این پاسخ مفروض

نخستین لبه پاسخ، تناظر با پاسخ مفروض بوده و از عمل تیر در دو تکیه‌گاه ساده بدست می‌آید.

مثال: ورق تحت بار گسترده صید و استاتیکی

فرم پاسخ عمود مانند قبل است.



$$p(x,y) = P_0 \frac{x}{a}$$



$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m y \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m y \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{P_m a^4}{m^4 \pi^4 D} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$w(y) = w(-y) \rightarrow A_m = D_m = 0$$

از تعادلات خواصیم داشت:

$$\rightarrow w = \frac{a^4}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_m}{m^4} \left(\frac{1}{2} \frac{2 + \alpha_m \tanh \alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \cos \frac{m\pi y}{a} + \frac{\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a}}{2 \cosh \alpha_m} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad \alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

$$p(x) = P_0 \frac{x}{a} \rightarrow P_m = \frac{2}{a} \int_0^a p(x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{2P_0}{m\pi} (-1)^{m+1}$$

$$\rightarrow w_p = \frac{P_0}{360D} \left(\frac{3x^5}{a} - 10ax^3 + 4a^3x \right) = \frac{2P_0 a^4}{x^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

معادلات کلی شده است - با این تغییر وقت از معادلات (دری که یکسان است) است

مثال: بار عمود بر ضلع ۲۰



با این تغییر وقت از معادلات (دری که یکسان است) است

$$P_m = \frac{4P_0}{m\pi} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{m\pi x_2}{a}$$

مثال: بار عمود بر ضلع ۲۰



$$P_m = 2c P_0$$

$$P_m = \frac{2P_0}{a} \sin \frac{m\pi x_1}{a}$$

با این تغییر وقت از معادلات (دری که یکسان است) است

Levy - تغییر وقت از معادلات



وقت تحت تغییر وقت از معادلات (دری که یکسان است) است

مثال: بار عمود بر ضلع ۲۰ - تغییر وقت از معادلات (دری که یکسان است) است
 و این تغییر وقت از معادلات (دری که یکسان است) است
 و این تغییر وقت از معادلات (دری که یکسان است) است
 و این تغییر وقت از معادلات (دری که یکسان است) است

وقت تحت تغییر وقت از معادلات (دری که یکسان است) است

وقت تحت تغییر وقت از معادلات (دری که یکسان است) است

$$V^2 w = 0 \rightarrow w = w_h$$

در وقت تحت تغییر وقت از معادلات (دری که یکسان است) است

$$y=b, w_0 = M y_0 = 0$$

$$y=0, w_0 = M y_0 = 0$$

$$y=b/2, w_0 = w_0, w_{y0} = w_{y0}, M_{y0} = M_{y0}, V_{y0} - V_{y0} = P(x) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

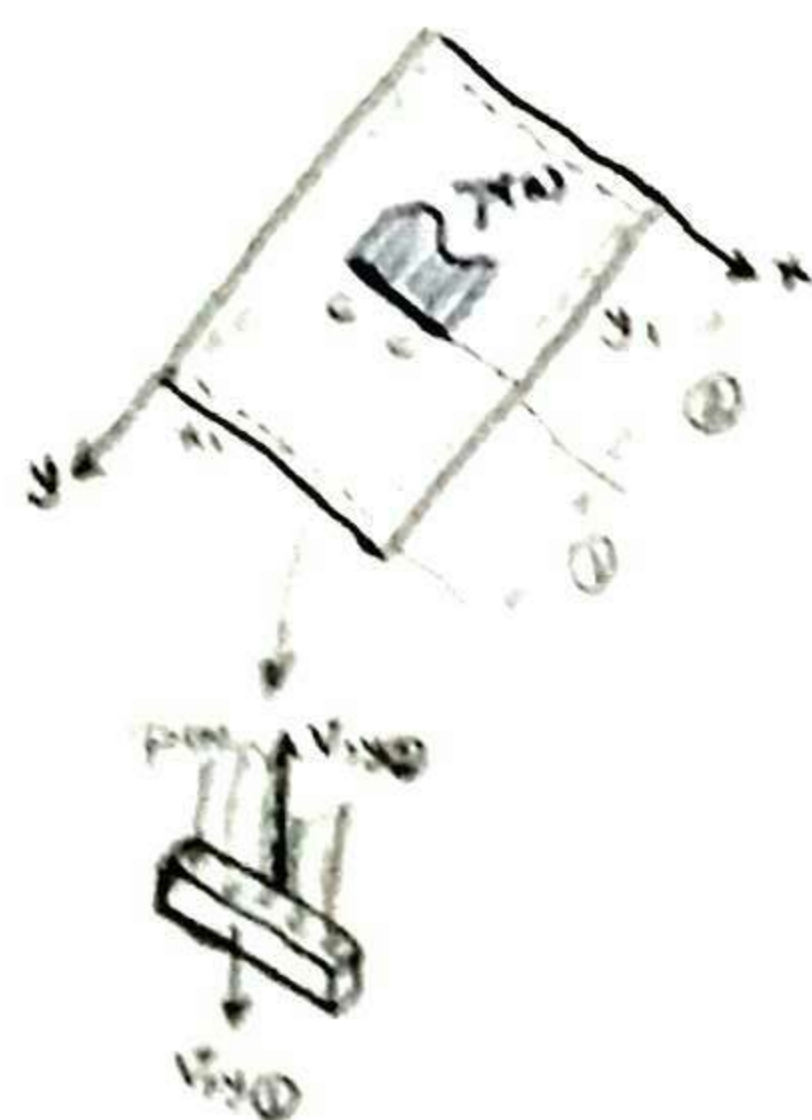
$$P_m = \frac{2P_0}{a} \int_{x_1-c}^{x_1+c} \sin \frac{m\pi x}{a} dx$$

در وقت تحت تغییر وقت از معادلات (دری که یکسان است) است

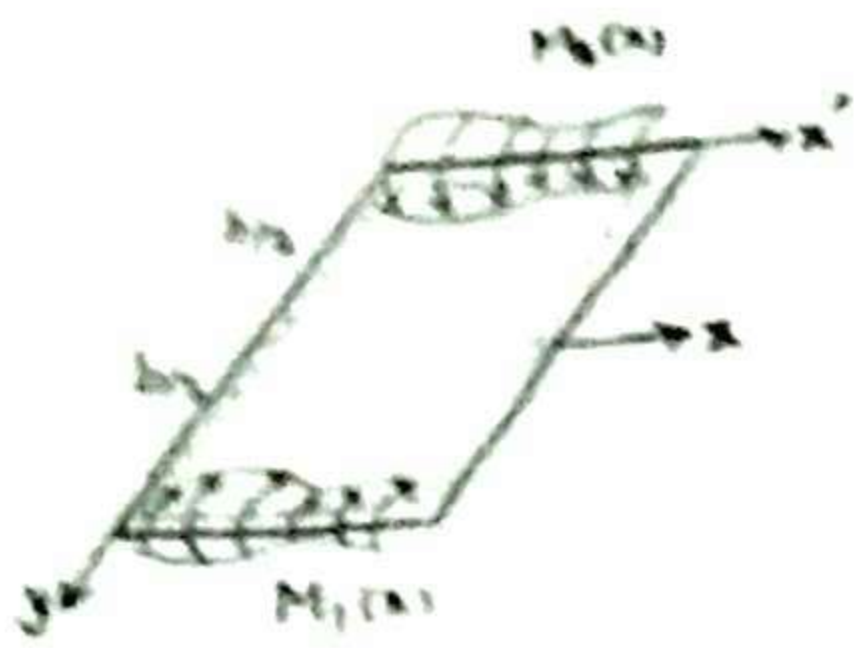
$$\rightarrow P_m = \frac{4P_0}{m\pi} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{m\pi x_2}{a}$$

در وقت تحت تغییر وقت از معادلات (دری که یکسان است) است

$$P = 2P_0 c \rightarrow P_m = \frac{2P}{a} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \quad (c \rightarrow 0)$$



در وقت فشار و لبه ای :



$$y = \pm b/2 : w = 0$$

$$y = b/2 : M_y = M_1(x) \quad (1)$$

$$y = -b/2 : M_y = M_2(x) \quad (2)$$

$$\nabla^4 w = 0$$

حاله حاکم دایره ای است بر روی است

شرایط مرزی عبارتند از:

برای شرایط مرزی شرایط حاکم تغییر پیدا می کند:

$$w = w_h = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m y \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m y \cosh \frac{m\pi y}{a}) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$$

در هر دوایر شرایط مرزی (1) و (2) لازم است که هم در لبه مرزها و هم در لبه مرزها شرایط مرزی برقرار باشد.

$$M_1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} M_{1m} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad , \quad M_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} M_{2m} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

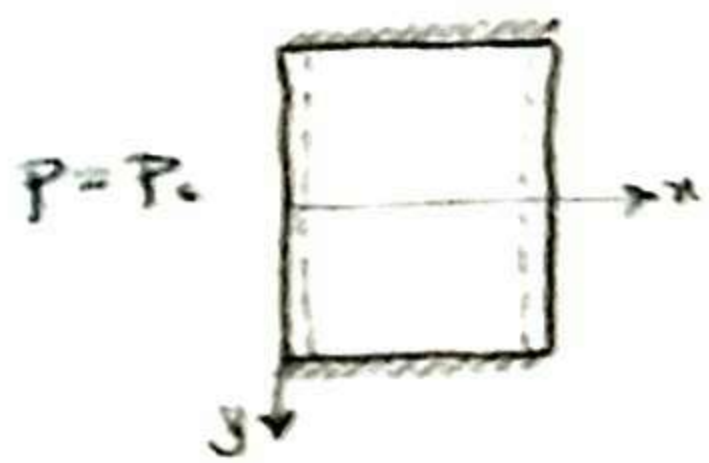
$$M_{1m} = \frac{2}{a} \int_0^a M_1(x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx$$

برای پایه و پاسخ نیز بصورت برعکس می شود:

$$w = \frac{a^2}{4\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left[\frac{M_{1m} + M_{2m}}{\cosh \alpha_m} \left(\alpha_m \tanh \alpha_m \cdot \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) + \dots \right]$$

$$\frac{M_{1m} - M_{2m}}{\sinh \alpha_m} \left(\alpha_m \coth \alpha_m \cdot \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

شرایط مرزی دیگر:

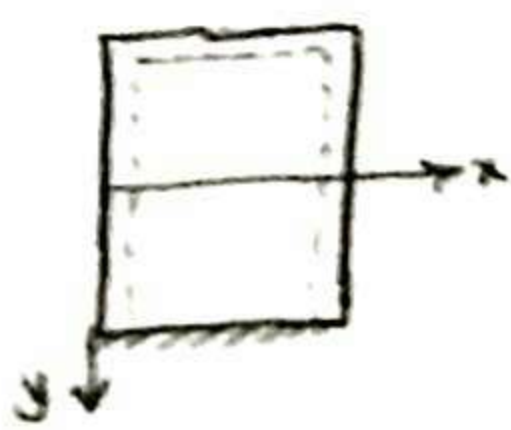


برای مثل ورق در دو حالت اول و دوم شرایط مرزی در لبه مرزها و در لبه مرزها شرایط مرزی برقرار باشد.

وقت که در هر دو حالت اول و دوم شرایط مرزی در لبه مرزها و در لبه مرزها شرایط مرزی برقرار باشد.

صورت داده شود.

$$M_{1m} = M_{2m} = \frac{4P_0 a^2}{\pi^3 m^3} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)}$$



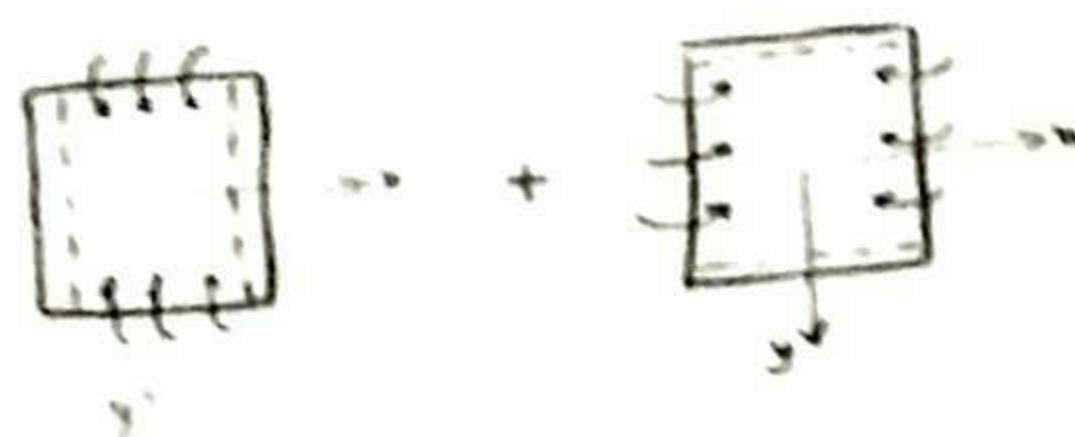
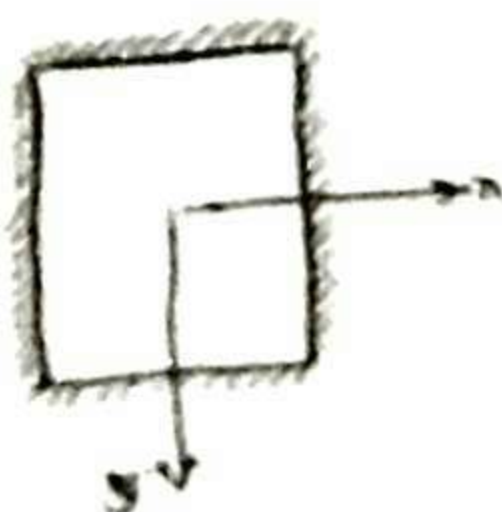
$$M_{1m} = - \frac{8P_0 a^2}{\pi^3 m^3} \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (1 + \alpha_m \tanh \alpha_m)}{\alpha_m \tanh \alpha_m - \tanh \alpha_m + \alpha_m \coth \alpha_m} - \coth \alpha_m - 2\alpha_m$$

$$M_{2m} = 0$$

در این حالت، اوج آثار دما در لبه مرزها و در لبه مرزها شرایط مرزی برقرار باشد.

در زمان استفاده از ورق در لبه مرزها و در لبه مرزها شرایط مرزی برقرار باشد.

و لا به $y + \frac{b}{2}$ تبدیل شود.



در این شرایط مرزی باید به طریقی $\square$ را برای دو تغییر $\square$ به $\square$ تبدیل شود.

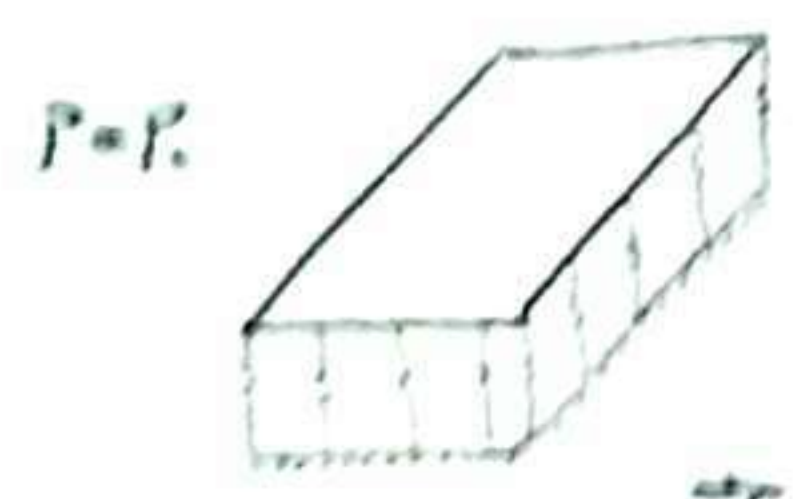
$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \rightarrow (1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} + (2) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} = \square$$

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

همچنین در زمان اتصال شرایط مرزی در لبه مرزها و در لبه مرزها شرایط مرزی برقرار باشد.

نمونه شکل:

رابطه $\nabla^4 w = \frac{P_0}{D}$ به هم در برده می شود:



$\nabla^4 w = \frac{P_0 - kw}{D}$ (k سختی درگاه سطح)

$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{kw}{D} = \frac{P_0}{D}$ (I)

۱- حل Navier:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$P = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

پس از جایگذاری عبارت بالا در معادله (I) خواهیم داشت:

$$W_{mn} = \frac{P_{mn}}{\lambda^4 D \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2 + k} \rightarrow w \checkmark$$

۲- حل Levy:

$w = w_h + w_p$
 $w_h = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \rightarrow \nabla^4 w_h = 0 \rightarrow \frac{d^4 f_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 f_m}{dy^2} + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + \frac{k}{D}\right] f_m = 0$

$$\Rightarrow f_m = A_m \sinh(\rho_m y) \sin(\delta_m y) + B_m \sinh(\rho_m y) \cos(\delta_m y) + \dots$$

 $C_m \cosh(\rho_m y) \sin(\delta_m y) + D_m \cosh(\rho_m y) \cos(\delta_m y)$

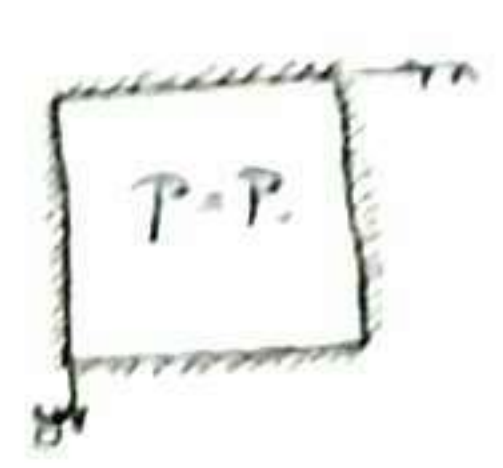
$\rho_m^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2m^2\pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{k}{D}} \right), \quad \delta_m^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2m^2\pi^2}{a^2} - \sqrt{\frac{k}{D}} \right)$

$p(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \Rightarrow w_p = \sum_{k=1}^{\infty} K_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$

$$\rightarrow \frac{d^4 K_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 K_m}{dy^2} + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + \frac{k}{D}\right] K_m = \frac{P_m}{D}$$

$$\Rightarrow w_p = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_m}{D \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + \frac{k}{D} \right]} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

روش انرژی:



$$W = \iint_A P_0 w \, dxdy$$

کار تغییرات خارجی عبارتست از:

$$\Pi = \iint_A \left[\frac{D}{2} (v^4 w)^2 - 2(1-\nu)(w_{,xx}w_{,yy} - (w_{,xy})^2) - P_0 w \right] dxdy$$

و انرژی پتانسیل کل می شود عبارتست از:

$$x=0, a \rightarrow w=0, \frac{\partial w}{\partial x}=0$$

$$y=0, b \rightarrow w=0, \frac{\partial w}{\partial y}=0$$

شرایط مرزی صلب است برقرارند:

از قضیه گرین-گرسون خواهیم داشت:

$$\iint_A w_{,xy} w_{,xy} \, dxdy = \int_S w_{,xy} w_{,xy} \, dx - \iint_A w_{,xx} w_{,yy} \, dxdy = - \iint_A w_{,xx} w_{,yy} \, dxdy$$
 $\begin{cases} dv = w_{,xy} dy \rightarrow v = w_{,x} \\ u = w_{,xy} \end{cases}$

$$- \iint_A w_{,xx} w_{,yy} \, dxdy = - \int_S w_{,xx} w_{,yy} \, dy + \iint_A w_{,xx} w_{,yy} \, dxdy = \iint_A w_{,xx} w_{,yy} \, dxdy$$
 $\begin{cases} dv = w_{,xy} dx \\ u = w_{,x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \Pi = \iint_A \left[\frac{D}{2} (v^4 w)^2 - P_0 w \right] dxdy$$

$$\rightarrow \left(\sum_m \sum_n \right) \left(\sum_y \sum_x \right)$$

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} (1 - \cos \frac{2m\pi x}{a}) (1 - \cos \frac{2n\pi y}{b})$$

برای شرط مرزی صاف را می توانیم در اینجا بکار ببریم

$$\Pi = 2\lambda^2 ab D \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[2 \left(\frac{m}{a} \right)^2 + 2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 + 2 \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] a_{mn} + \dots \right.$$

در اینجا هم به همین روش

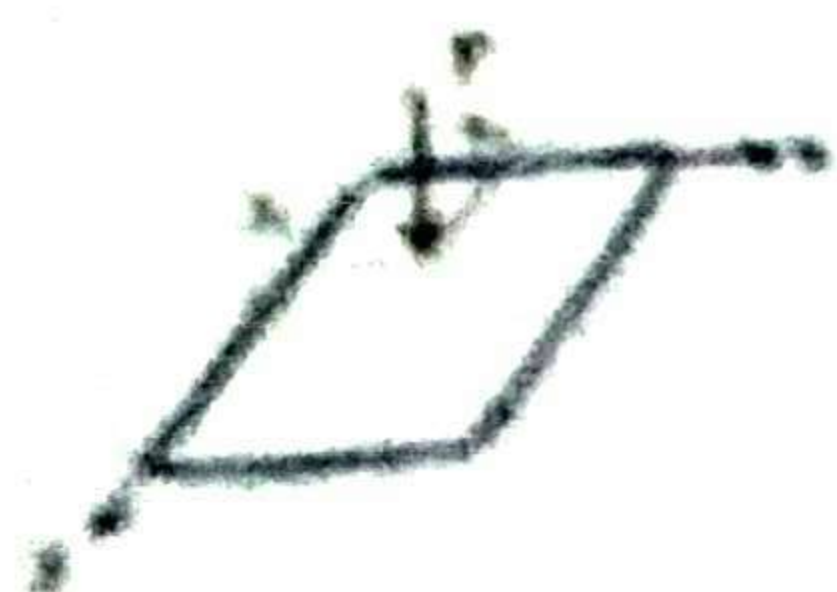
$$\left. \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} 2 \left(\frac{m}{a} \right)^2 a_{mp} a_{pn} + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 a_{mp} a_{pn} \right\} - p.ab \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{mn}} = 0 \rightarrow 4D\lambda^2 ab \left\{ \left[2 \left(\frac{m}{a} \right)^2 + 2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 + 2 \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] a_{mn} + \sum_{p=1}^{\infty} 2 \left(\frac{m}{a} \right)^2 a_{mp} + \sum_{p=1}^{\infty} 2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 a_{pn} \right\} - p.ab = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dots \rightarrow \dots \rightarrow \dots \rightarrow \dots$$

اینجا هم به همین روش a_{mn} را می توانیم در اینجا بکار ببریم

در اینجا هم به همین روش a_{mn} را می توانیم در اینجا بکار ببریم



$$W = p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} (1 - \cos \frac{2m\pi x}{a}) (1 - \cos \frac{2n\pi y}{b})$$

$$\Pi = U - W \rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial a_{mn}} = 0 \rightarrow 2\lambda^2 ab D \left\{ \left[2 \left(\frac{m}{a} \right)^2 + 2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 + 2 \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] a_{mn} + \dots \right.$$

$$\left. \sum_{p=1}^{\infty} 2 \left(\frac{m}{a} \right)^2 a_{mp} + \sum_{p=1}^{\infty} 2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 a_{pn} \right\} - p(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a})(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b}) = 0$$