

درین قسمت بارهای عرضی و درون صفحه ای معینان

ساده ترین راه یافتن معادلات حاکم در این حالت، بکارگیری مفهوم دقت اول از روی پائیل کل است. در حالت کلی از شرط پیل نوکله های u, v و w در نقاط مشخص از سطح

با نوکله های خاص لایه های u, v, w برابر است.

(u, v, w با جابجایی های لایه های u, v, w باشند)

$$\begin{cases} \tilde{u} = u - z w_{,n} \\ \tilde{v} = v - z w_{,y} \\ \tilde{w} = w \end{cases} \quad (1)$$

در حالت کلی، نوکله های u, v, w در این لایه های u, v, w برابر است.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{\alpha,i} u_{\alpha,j})$$

بنابراین با بکارگیری فرضیات فاند فرنیات Von-Karman (پیش از اشتقاق u, v در برابر w) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \epsilon_x = u_{,n} + \frac{1}{2} (w_{,n})^2 \\ \epsilon_y = v_{,y} + \frac{1}{2} (w_{,y})^2 \\ \delta_{ny} = u_{,y} + v_{,n} + w_{,n} w_{,y} \end{cases} \quad (2)$$

برای لایه های u, v, w خواهیم داشت:

و از رابطه $\tilde{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij} - z w_{,ij}$ داریم که:

$$\tilde{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\tilde{\epsilon}_x + \nu \tilde{\epsilon}_y) \quad \tilde{\tau}_{ny} = 2G \tilde{\epsilon}_{ny} \quad (3)$$

$$\tilde{\sigma}_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\tilde{\epsilon}_y + \nu \tilde{\epsilon}_x)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_V (\tilde{\sigma}_x \tilde{\epsilon}_x + \tilde{\sigma}_y \tilde{\epsilon}_y + \tilde{\tau}_{ny} \tilde{\epsilon}_{ny}) dV + \int_V \rho (\tilde{u} \tilde{u} + \tilde{v} \tilde{v} + \tilde{w} \tilde{w}) dV \\ - \int_A p \tilde{w} dA - \int_{\Gamma} (N_n u_n + N_{nt} u_t - M_n w_{,n} - M_{nt} w_{,t} + Q_n w) d\Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

از جایگزینی رابطه (1) تا (3) در رابطه (4) و گذشتن معادلات Π ، رابطه حاکم بر وقت به دست می آید:

$$N_{n,n} + N_{ny,y} = I_0 \ddot{u} - I_1 \ddot{w}_{,n}$$

معادله (5) حاصل از معادلات (1) تا (3) و معادله (4) می باشد.

$$N_{ny,x} + N_{y,y} = I_0 \ddot{v} - I_1 \ddot{w}_{,y}$$

$$M_{n,nn} + 2M_{ny,ny} + M_{y,yy} + \frac{\partial}{\partial x} (N_n w_{,n} + N_{ny} w_{,y}) + \frac{\partial}{\partial y} (N_{ny} w_{,n} + N_y w_{,y}) = \dots \quad (5)$$

$$p + I_0 \ddot{w} + I_1 (\ddot{u}_{,n} + \ddot{v}_{,y}) - I_2 (\ddot{w}_{,nn} + \ddot{w}_{,yy})$$

$$(N_{ij}, M_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}(1,z) dz \quad I_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^i dz \quad (6)$$

توضیح: رابطه (3)، معادله (N_{ij}, M_{ij}) بر حسب w به دست می آید. با جایگزینی معادلات (1) تا (3) در رابطه (4) و گذشتن معادلات (5) و بیان معادلات M بر حسب w خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} D \nabla^4 w = p + N_n w_{,nn} + 2N_{ny} w_{,ny} + N_y w_{,yy} + (I_0 \ddot{u} - I_1 \ddot{w}_{,n}) w_{,n} + (I_0 \ddot{v} - I_1 \ddot{w}_{,y}) w_{,y} + I_2 \nabla^2 \ddot{w} \\ - I_0 \ddot{w} - I_1 (\ddot{u}_{,n} + \ddot{v}_{,y}) \end{aligned}$$

برای گذشتن از انتگرال های w خواهیم داشت:

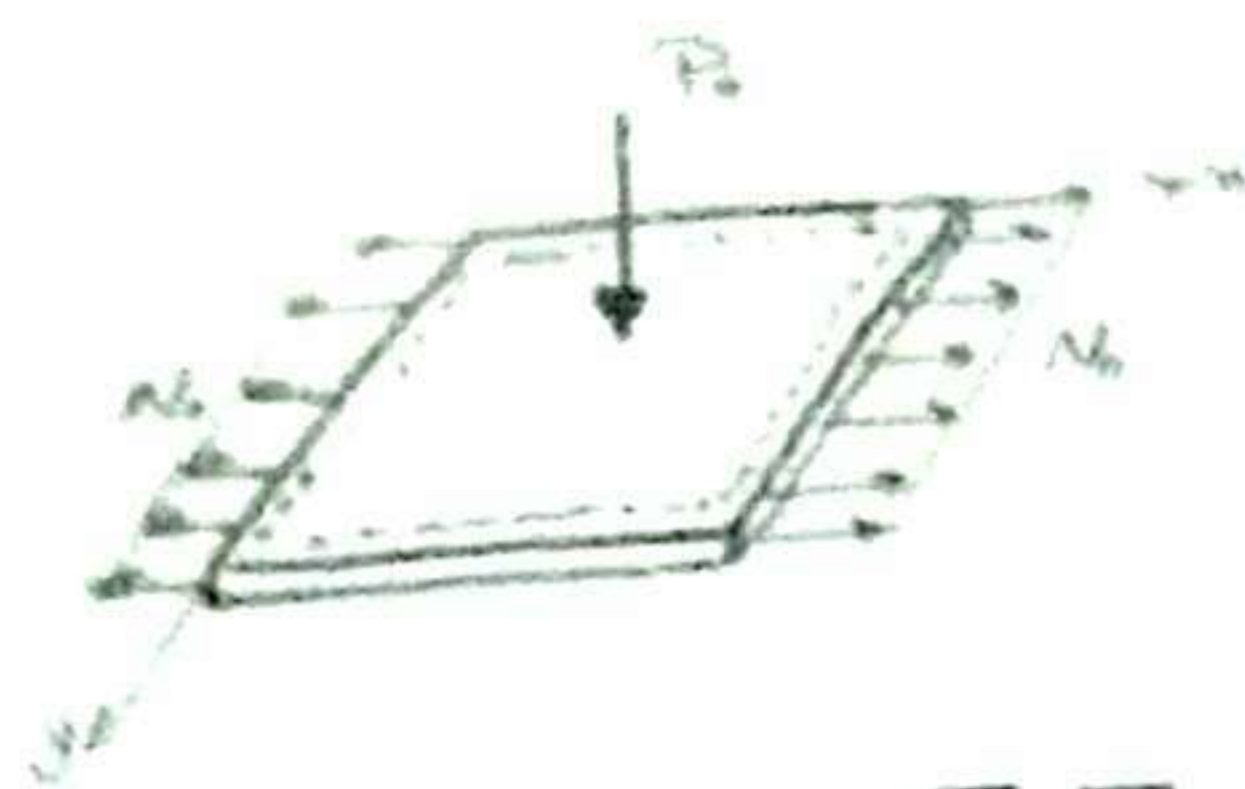
$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} (p + N_n w_{,nn} + 2N_{ny} w_{,ny} + N_y w_{,yy}) \quad (7)$$

برای گذشتن از انتگرال های w خواهیم داشت:

و در نهایت معادله w به دست می آید: $w = \frac{1}{D} (p + N_n w_{,nn} + 2N_{ny} w_{,ny} + N_y w_{,yy})$

مثال: ورق روی یک پایه ساده، تحت بار گسترده عرض و کشش طولیافت

آرایش بار گسترده کششی، معادله (7) تنها دارای ششافت مرتبه زوج بوده و شرایط مرزی مناسب وجود دارند.
می توان از خود روش Navier, Levy استفاده نمود.



روش Navier:

$$W = \sum_m \sum_n W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$P = \sum_m \sum_n P_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

پس از جایگزینی در رابطه (7) خواهیم داشت:

$$W_{mn} = \frac{16 P_{mn}}{\pi^6 D_{mn} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 + \frac{N_x}{D} \left(\frac{m}{a} \right)^2}$$

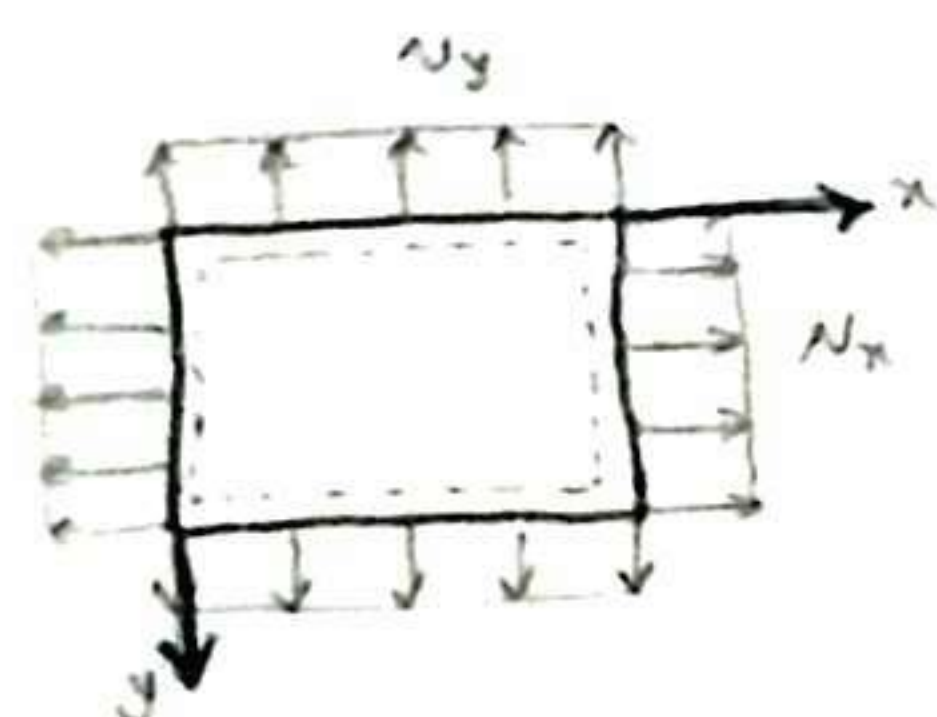
$$\begin{cases} N_y, N_{xy} = 0 \\ N_x = N_0 \end{cases}$$

وجود N_0 شش موجب کاهش دامنه غیره می گردد. در حالتی که مقدار منفی N_0 باعث عبور شدن موج گرما و در نتیجه بر نهایت شدن دامنه غیره می گردد، کشش عرضی وجود دارد.

$$(N_0)_{cr} = \frac{- \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}{\frac{1}{D} \left(\frac{m}{a} \right)^2}$$

مثال: بار یکجانبه کشش ورق زیر انعکاس کشید.

از روش Navier خواهیم داشت:



$$W(x,y) = \sum_m \sum_n W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

با توجه $\alpha = \frac{N_y}{N_x}$ ، از معادله حاکم بر ورق به دست می آید:

$$\nabla^4 W = \frac{1}{D} (P + N_x W_{,xx} + N_y W_{,yy} + 2 N_{xy} W_{,xy})$$

$$\nabla^4 W + \frac{-N_x}{D} W_{,xx} + \frac{-N_y}{D} W_{,yy} = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ D \pi^4 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 + N_x \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \alpha \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \right\} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0$$

$$\rightarrow (N_x)_{cr} = - D \pi^2 \frac{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \alpha \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]}$$

حالت خاص: $N_y = 0 \leftarrow \alpha = 0$

$$(N_x)_{cr} = - D \pi^2 \frac{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}{\left(\frac{m}{a} \right)^2}$$

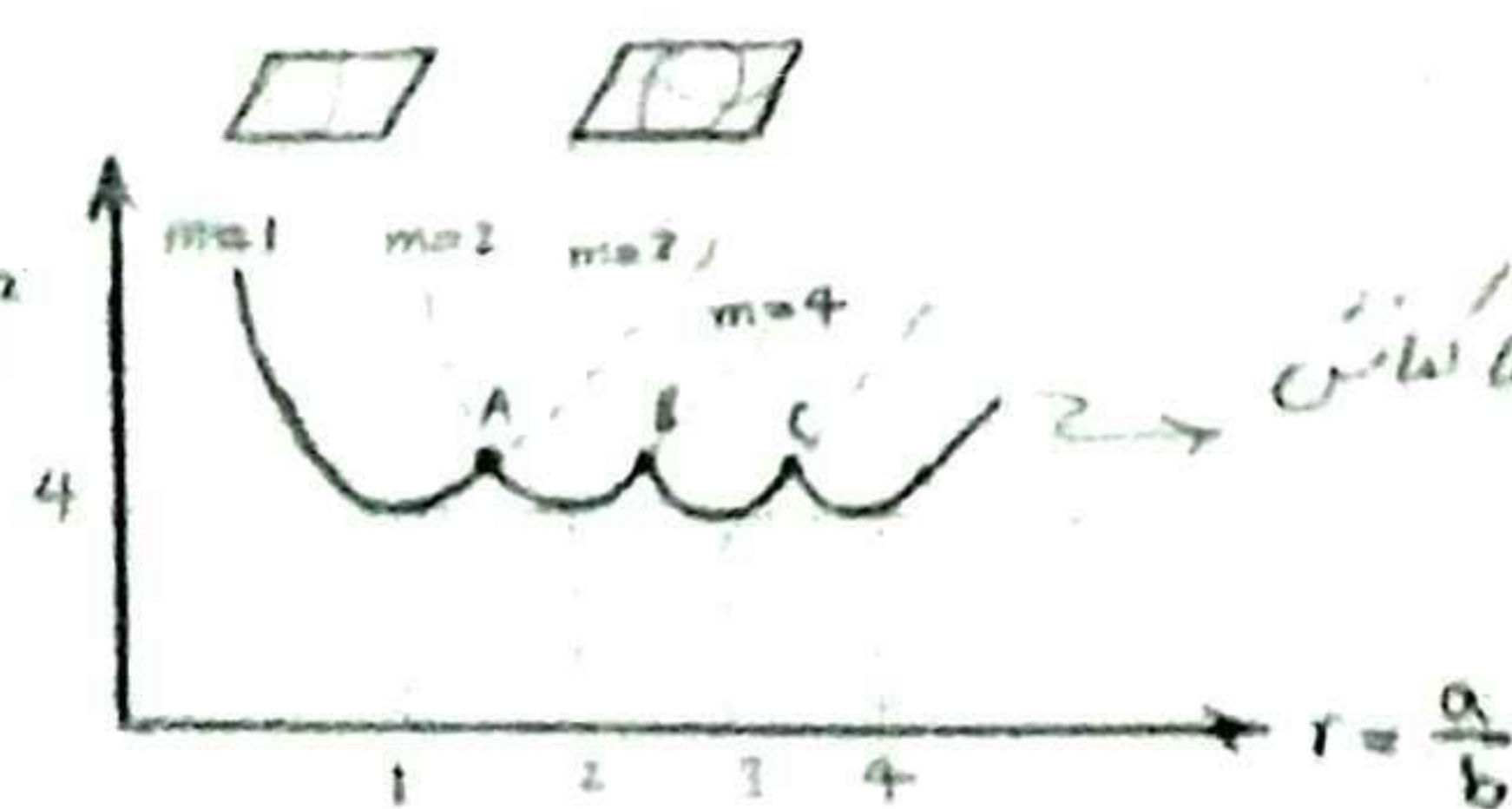
کوچکترین بار یکجانبه در ازای $n=1$ به دست می آید:

$$(N_x)_{cr} = - D \pi^2 \frac{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \right]^2}{\left(\frac{m}{a} \right)^2} = \frac{- D \pi^2}{b^2} \left(\frac{m}{r} + \frac{r}{m} \right)^2, \quad r = \frac{a}{b}$$

کوچکترین مقدار رابطه بالا در ازای $\frac{m}{r} = 1$ رخ خواهد داد:

$$(N_x)_{cr} = \frac{-4 D \pi^2}{b^2}$$

$$\frac{-N_{x,cr} b^2}{\pi^2 D} = \left(\frac{m}{r} + \frac{r}{m} \right)^2$$



1. دلیل ندارد که اولین مورد کشش برای $m, n=1$ اتفاق نیفتد.

2. حداقل کشش ممکن در r دارد، باید به r وقت کرد و به معنی

باید به سراسر ورق نگاه کرد. مثال $\alpha = 3b \rightarrow \begin{cases} n=1 \\ m=3 \end{cases}$

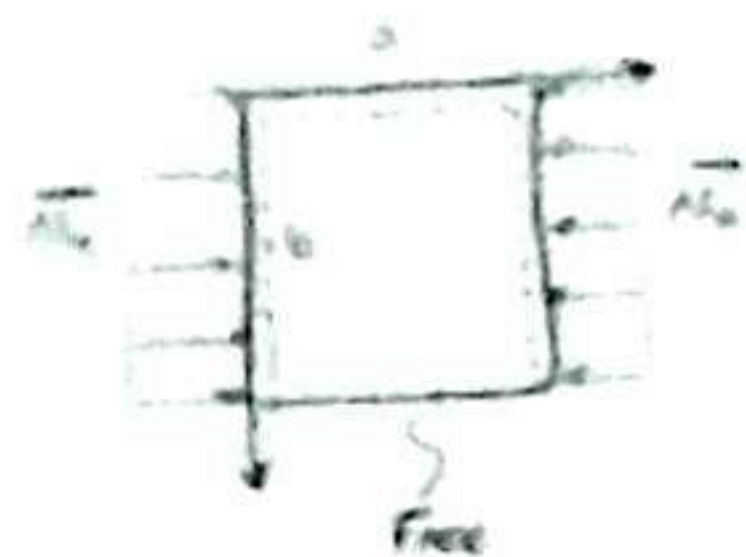
3. اگر $r=1.8$ باشد، بار کشش لازم می آید و بهتر از $r=2$ می باشد.

پس در هر حالتی می توانست r غیر صحیح باشد.

4. در نقاط A, B, C، باید بارهای مختلف در مدال کشش بارها در سراسر ورق می تواند بین $m=1, m=2$ برای نقطه A اتفاق نیفتد.

مثلاً: اجزای مختلف و متفاوت به یکدیگر پیوسته اند و در یک راستا قرار دارند.

با توجه به اینکه سازه یکپارچه است و از آنجا که در هر یک از اجزای سازه یکسان است.



$$p = N_y = N_{xy} = 0$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1)$$

و با توجه به اینکه سازه یکپارچه است و از آنجا که در هر یک از اجزای سازه یکسان است.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$(1) \Rightarrow \lambda_m^4 f_m - 2 \lambda_m^2 f_m'' - f_m^{(4)} = - \frac{N_x}{D} \lambda_m^2 f_m, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}$$

$$\text{در } y=0 \rightarrow w, w_{,yy} = 0$$

$$y=b \rightarrow M_y, V_y = 0$$

$$N_x = -\bar{N}_x$$

$$f_m(y) = A \cosh(\alpha y) + B \sinh(\alpha y) + C \cos(\beta y) + D \sin(\beta y)$$

$$\alpha = (\lambda_m^2 + \lambda_m \sqrt{\frac{N_x}{D}})^{1/2}, \quad \beta = (-\lambda_m^2 + \lambda_m \sqrt{\frac{N_x}{D}})^{1/2}$$

پس با اعمال شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$-\beta \tanh(\alpha_m b) (\alpha_m^2 - \beta_m^2)^2 + \alpha \tanh(\beta_m b) (\beta_m^2 + \alpha_m^2)^2 = 0$$

که کمترین بار بحرانی در این حالت $m=1$ است و در این حالت $v=0.3$ خواهیم داشت:

$$\bar{N}_{x,cr} = -1.44 \frac{\pi^2 D}{b^2}$$

از روش انرژی می توان حل را داشت:

$$\Pi = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) [w_{,xx} w_{,yy} - (w_{,xy})^2] \} dxdy - \int_0^a \int_0^b p w dxdy + \int_0^a \int_0^b \left[\frac{1}{2} N_x (w_{,x})^2 + \frac{1}{2} N_y (w_{,y})^2 + N_{xy} w_{,x} w_{,y} \right] dxdy$$



$$w(x, y) = A \cdot y \cdot \sin \frac{\pi x}{a}$$

تابع سینوسی را به مقدار $y=b$ تغییر می دهیم

چون $y=0$ باید صفر باشد و کم کم $\cos$ به $\sin$ تبدیل شود

پس با اعمال شرایط مرزی خواهیم داشت:

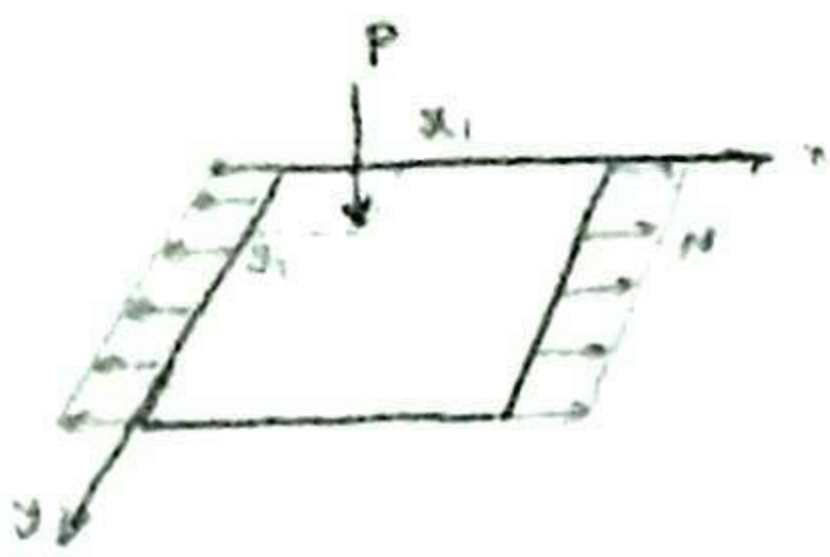
$$\Pi = \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[(-Ay \frac{\pi^2}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a})^2 + 2(1-\nu) (+A \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a})^2 \right] dxdy + \frac{N_x}{2} \int_0^a \int_0^b A^2 y^2 \frac{\pi^2}{a^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} dxdy$$

$$\Pi = \frac{1}{4} \left\{ A^2 D \left[\frac{\pi^2}{a^3} \frac{b^3}{3} + 2(1-\nu) \frac{\pi^2 b}{a} \right] + N_x A^2 \frac{\pi^2 b^3}{3a} \right\}$$

$$\delta \Pi = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial A} = 0 \Rightarrow N_x = - \left[\frac{\pi^2 D}{a^2} + \frac{6(1-\nu) D}{b^2} \right]$$

$$a=b, \nu=0.3 \rightarrow N_{x,cr} = -1.456 \frac{\pi^2 D}{b^2}$$

پاسخ داریش Navier انتساب عبود روابط ازین Π جاگیر می کنیم



$$w = \sum_m \sum_n W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

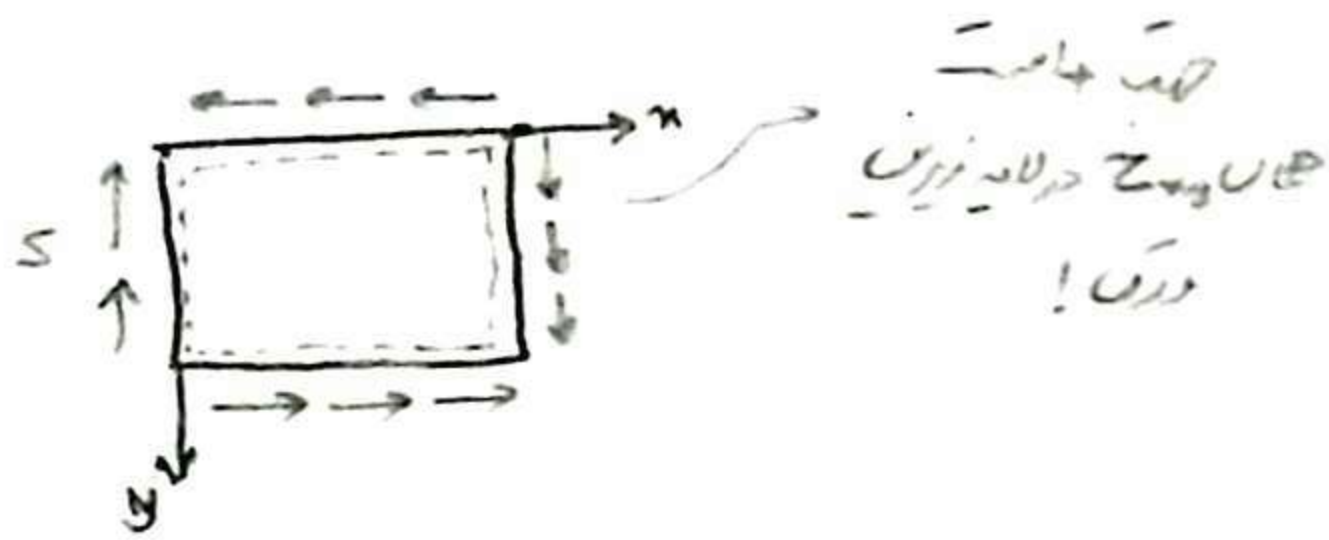
$$W = Pw|_{x=a/2, y=b/2}$$

$$\Rightarrow \Pi = \dots \rightarrow W_{mn} = \frac{4P \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y_1}{b}}{ab\pi^4 D \left\{ \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 + \frac{m^2 n^2}{\pi^2 a^2 b^2} \right\}}$$

$$N_{cr} = - \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2$$

بارکشی عبود از این صورتی خارج W_{mn} حاصل می گردد:

که مثلاً بار یکبارگی بارکشی ورق بدون بار مستطین است.

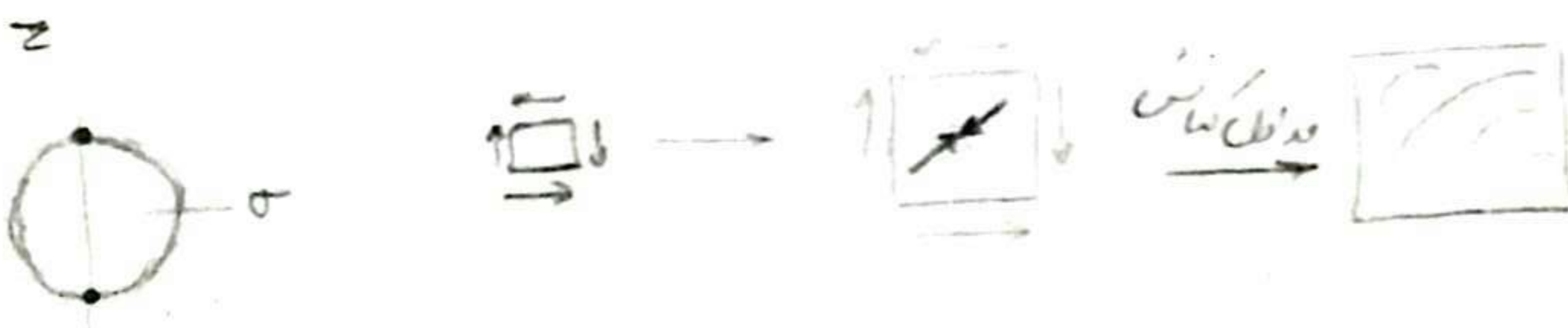


فصل: ورق تحت برش خالص به شدت S

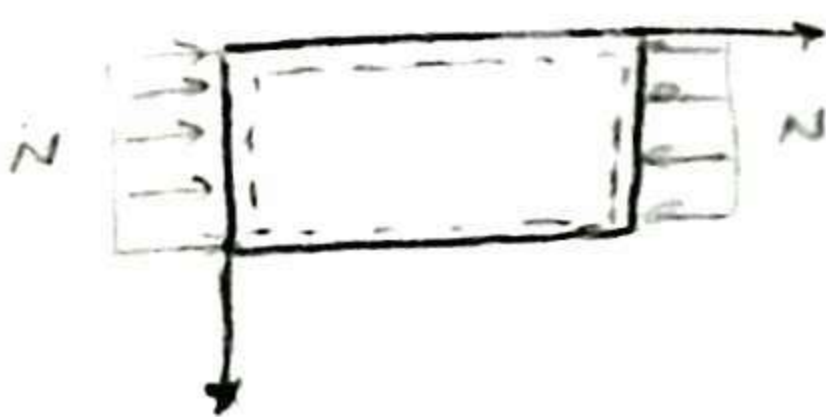
ازین Navier, Levy می توان استفاده کرد چرا که مستطین لول بخاطر عبود
Navy در رابط طاهره می گردد. (طاهره مستطین فرد در رابط حاکم)

ازین ازین با انتساب پاسخ داریش Navier می توان استفاده نمود:

$$S_{cr} = \pm \frac{a\pi^4 D (1+r^2)^2}{32b^2 r^2}, \quad r = \frac{a}{b}$$



ورق طولی فیرونی



فیرونی به تصویر شود طاهره آن از نقطه بسیار کوچکتر باشد با w_0 و فیرونی در آن بار با w_1
عاشق داده می شود. از آنجا که تنها در حالت فشار تنها به w_1 وابسته اند نمی توانند حاکم بر روابط گویان

$$\nabla^4 w_1 = \frac{1}{D} [P + N_x w_{,nn} + N_y w_{,yy} + 2N_{xy} w_{,ny}] \quad (2) \quad (w = w_0 + w_1)$$

لحاظاً شامل عبود فیرونی شود.

نرم تغییر شکل فیرونی معلوم بوده در حالت سیرا ناوی (فاند w_1) قابل سنجش است:

$$M_x = -D(w_{,nn} + w_{,yy})$$

فقط آنگاه w_1 وابسته است.

$$w_0 = \sum_m \sum_n W_{0mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$w_1 = \sum_m \sum_n W_{1mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

در تمام از رابط (2) خواصم وابسته:

$$W_{1mn} = \frac{W_{0mn} N}{\pi^2 \frac{D}{a^2} \left[m + \left(\frac{n^2 a^2}{m^2 b^2} \right) \right]^2 - N} \rightarrow w = w_0 + w_1 = \sum_m \sum_n \frac{W_{0mn}}{1-\alpha} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\alpha = \frac{N}{\pi^2 \frac{D}{a^2} \left[m + \left(\frac{n^2 a^2}{m^2 b^2} \right) \right]^2}$$

در حالت ویژه $\alpha = 1$ کثافت می گردد.

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left[m + \frac{n^2 a^2}{m^2 b^2} \right]^2$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left[m + \frac{a^2}{m^2 b^2} \right]^2 \xrightarrow{m=1, n=1} N_{cr} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left[1 + \frac{a^2}{b^2} \right]^2 = \frac{4\pi^2 D}{b^2}$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left[1 + \frac{a^2}{b^2} \right]^2 = \frac{4\pi^2 D}{b^2}$$

نکته: کثافت به است آمده به بارکشی بدون تغییر شکل اولیه می باشد.