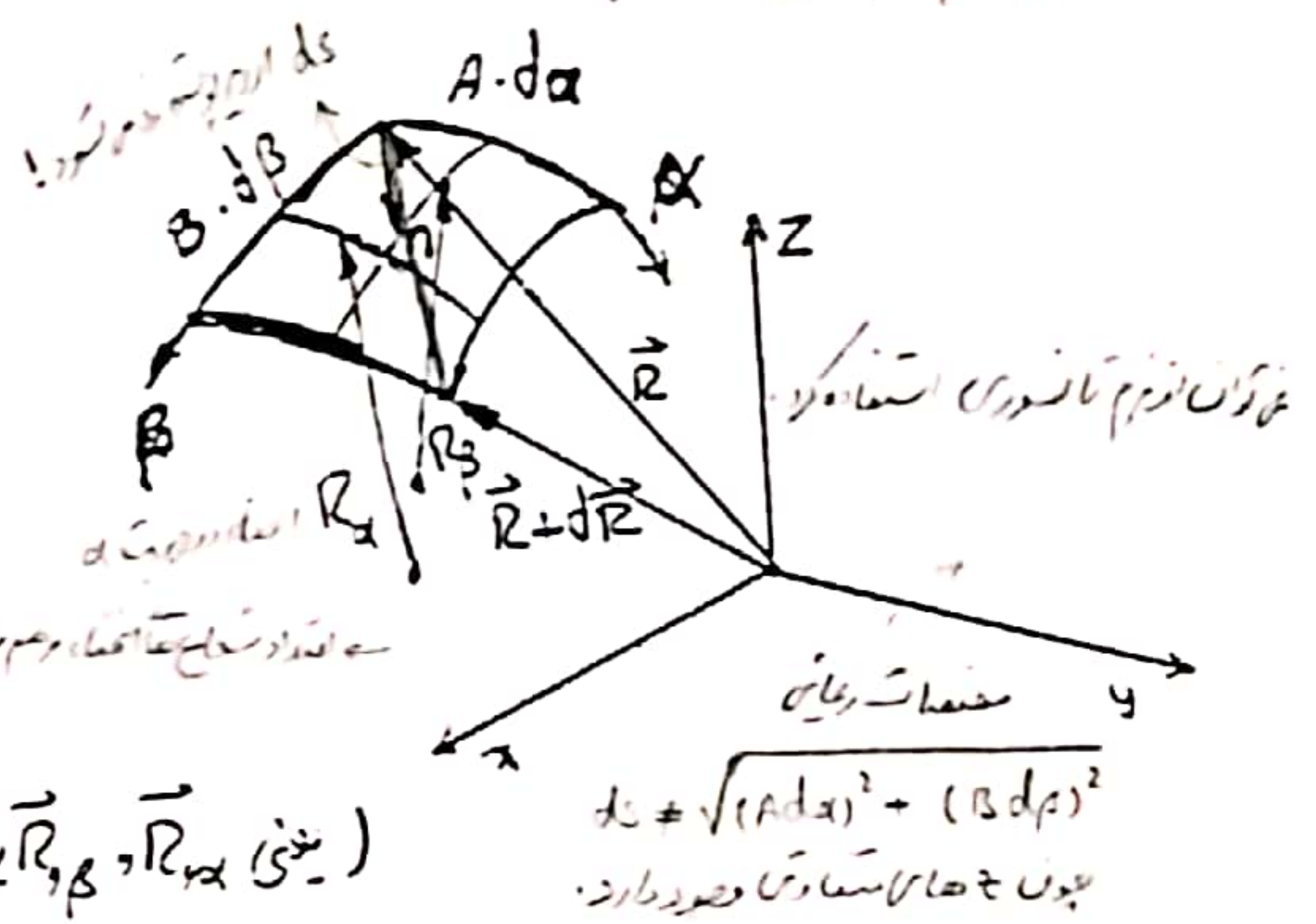


فصل ششم

ویژگیار لایه‌های بی‌نهایت نازک (سطوح رومی‌ها)

مردمان هم‌آهنگی در $\frac{t}{R} < 0.001$ در نظر گرفته می‌شود (R به عنوان شعاع انحناء)

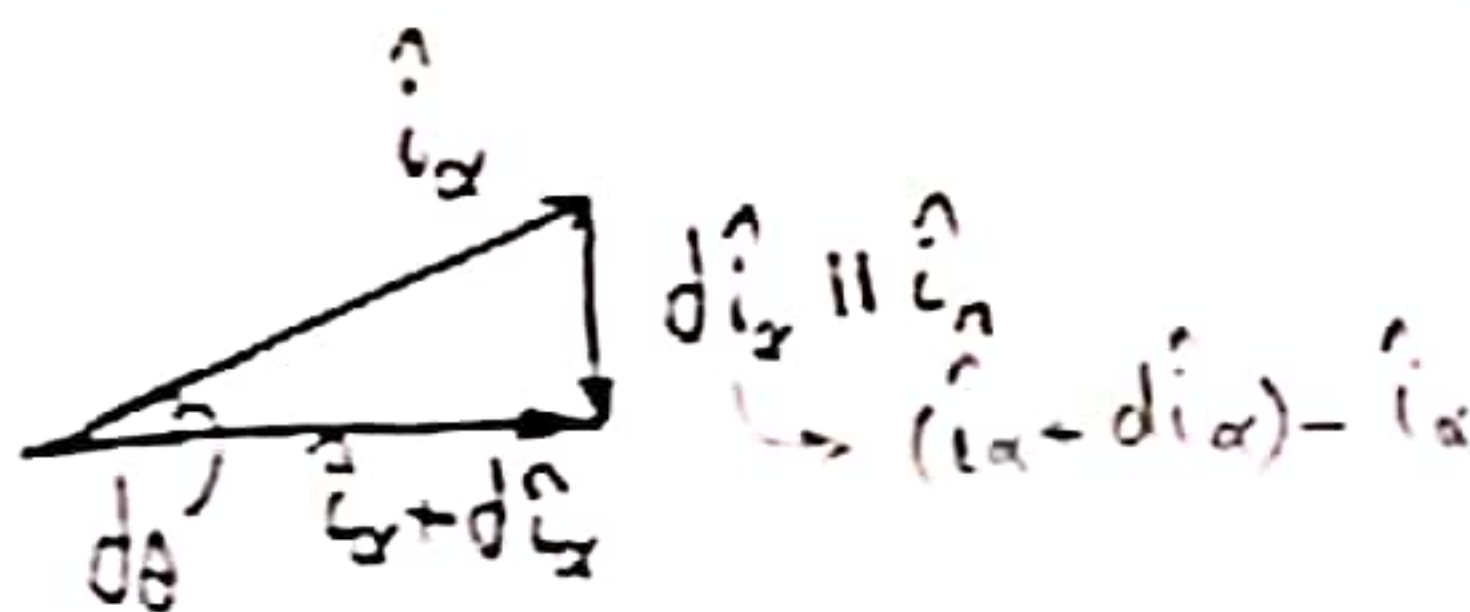


المانی از سطح بی‌نهایت نازک به فرم نشان داده شده را در نظر بگیرید.

اگر طول اضلاع المان در مختصات دانه‌ها، مانند شکل باشد، آنگاه می‌توان نوشت برابر میل، در مختصات استوانه‌ای: طول کمان $R d\theta$ است و $A = r$:

$$\begin{aligned} d\vec{R} &= A d\alpha \hat{i}_\alpha + B d\beta \hat{i}_\beta \\ d\vec{R} &= \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \beta} d\beta \\ \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha} &= A \hat{i}_\alpha, \quad \frac{\partial \vec{R}}{\partial \beta} = B \hat{i}_\beta \quad (\text{یعنی } \vec{R}_\alpha \text{ به سمت } \hat{i}_\alpha \text{ و } \vec{R}_\beta \text{ به سمت } \hat{i}_\beta) \\ \hat{i}_\alpha &= \frac{1}{A} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \alpha}, \quad \hat{i}_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \beta} \end{aligned}$$

برای یافتن شعاع انحناء R_α (انحناء در صفحه α)، از شکل رومی‌ها استفاده می‌کنیم.



$$d\theta = \frac{|d\hat{i}_\alpha|}{|\hat{i}_\alpha|} = |d\hat{i}_\alpha|, \quad d\theta = \frac{ds}{R_\alpha} = \frac{A d\alpha}{R_\alpha} \rightarrow \frac{|d\hat{i}_\alpha|}{d\alpha} = \frac{1}{R_\alpha}, \quad ds = A d\alpha$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\hat{i}_\alpha}{d\alpha} \right| &= \frac{A}{R_\alpha} \quad \text{or} \quad \frac{|d\hat{i}_\alpha|}{d\alpha} = \frac{A}{R_\alpha} \rightarrow \frac{d\hat{i}_\alpha}{d\alpha} = \frac{A}{R_\alpha} \hat{i}_n \\ \hat{i}_\alpha &= \frac{1}{A} \vec{R}_\alpha \rightarrow d\hat{i}_\alpha = -\frac{1}{A^2} \frac{\partial A}{\partial \alpha} \vec{R}_\alpha d\alpha + \frac{1}{A} \vec{R}_{\alpha\alpha} d\alpha \\ &= -\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \alpha} \hat{i}_\alpha d\alpha + \frac{1}{A} \vec{R}_{\alpha\alpha} d\alpha = \frac{1}{A} \vec{R}_{\alpha\alpha} d\alpha \end{aligned}$$

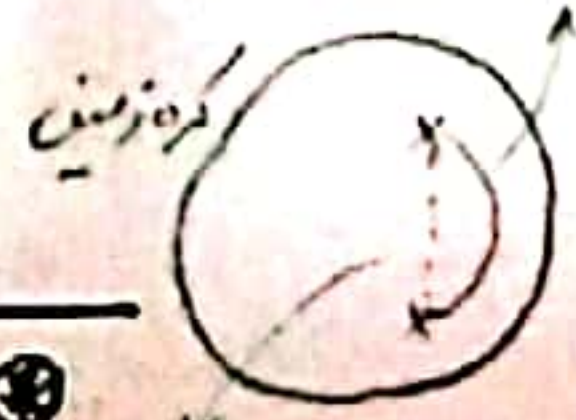
در بارها عبارت اول طرف دوم تا ویرجینا می‌توان اظهار نظر نمود. هنگامی که از رابطه $ds = A d\alpha$ استفاده می‌کنیم، فرض می‌کنیم که A در تمام طول المان ثابت است. یعنی A, α عملاً صفر فرض می‌گردد. تغییر دقیق آنست که به دلیل آنکه انحناء α فضایی است و در یک صفحه جاری نمی‌گیرد (صفحات به موازات $\hat{n}$ ، شعاع انحناء در تمام جهات یکسان نخواهد داشت). اگر لبه‌ها α و β از تقاطع دو صفحه عمود بر هم و بی‌نهایت نازک باشند (برابر میل)، در مختصات استوانه‌ای، کرور، مخروطی و ... آنگاه این عبارت صفر گشته و عبارت بعدی در جهت $\hat{n}$ خواهد بود.

$$\begin{aligned} \vec{R}_{\alpha\alpha} &= R_{\alpha\alpha} \hat{i}_n \\ d\hat{i}_\alpha &= \frac{1}{A} \vec{R}_{\alpha\alpha} d\alpha = \frac{R_{\alpha\alpha}}{A} \hat{i}_n d\alpha \\ \frac{d\hat{i}_\alpha}{d\alpha} &= \frac{R_{\alpha\alpha}}{A} \hat{i}_n \rightarrow \frac{\hat{i}_n}{R_\alpha} = \frac{1}{A} \frac{d\hat{i}_\alpha}{d\alpha} \cdot \hat{i}_n \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{R_\alpha} = \frac{R_{\alpha\alpha}}{A^2} \\ \frac{1}{R_\beta} = \frac{R_{\beta\beta}}{B^2} \end{cases}$$

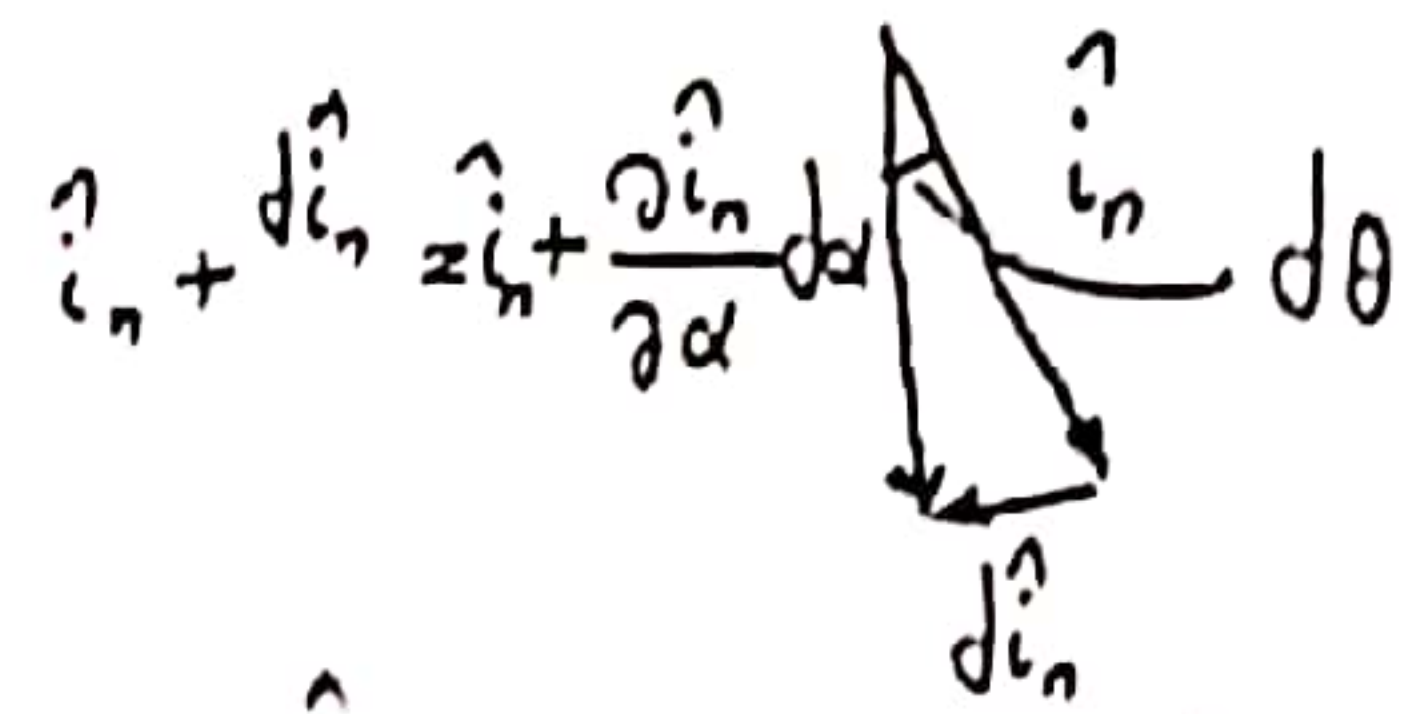
از آنجا که مرکز انحناء سطح رومی عمود بر سطح قرار دارد، مرکز انحناء سطح در جهت α و β رومی عمود بر سطح (یک خط) قرار خواهد داشت.

Riemann



Euclidean

همچنین، با توجه به شکل صفی قبل:



$$\frac{d i_n}{d \alpha} = \frac{A}{R_\alpha} \cdot i_n, \quad \frac{d i_p}{d \beta} = \frac{B}{R_\beta} \cdot i_n$$

از سورا دیگر:

$$\vec{R}_{\alpha\beta} = \vec{R}_{\beta\alpha}, \quad \vec{R}_{\alpha} = A i_\alpha, \quad \vec{R}_{\beta} = B i_\beta$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial \beta} (A i_\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (B i_\beta)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} i_\alpha + A i_{\alpha,\beta} = \frac{\partial B}{\partial \alpha} i_\beta + B i_{\beta,\alpha}$$

مجموع جملات دارای i_α و i_β از دو طرف مستقل از یکدیگر می‌گیرند، بنابراین آن دو طرف مساوی همواره برابر باشند، از تقابله دو طرف:

$$\begin{cases} i_{\alpha,\beta} = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} i_\beta \\ i_{\beta,\alpha} = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} i_\alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} i_\beta \cdot i_\alpha = 0 & \xrightarrow{\partial/\partial \alpha} i_\beta \cdot i_{\alpha,\alpha} = -i_\alpha \cdot i_{\beta,\alpha} = -\frac{1}{B} A_{,\beta} \\ i_n \cdot i_\alpha = 0 & \xrightarrow{\partial/\partial \alpha} i_n \cdot i_{\alpha,\alpha} = -i_\alpha \cdot i_{n,\alpha} = \frac{A}{R_\alpha} \end{aligned}$$

و با توجه به تقابله بردارها می‌توان:

$$i_\beta \cdot i_\alpha = 0 \xrightarrow{\partial/\partial \beta} i_\alpha \cdot i_{\beta,\beta} = -i_\beta \cdot i_{\alpha,\beta} = -\frac{1}{A} B_{,\alpha}$$

$$i_n \cdot i_\beta = 0 \xrightarrow{\partial/\partial \beta} i_n \cdot i_{\beta,\beta} = -i_\beta \cdot i_{n,\beta} = \frac{B}{R_\beta}$$

بدین است که مؤلفه $i_{\alpha,\alpha}$ درجه α و مؤلفه $i_{\beta,\beta}$ درجه β می‌باشد. مؤلفه این بردارها درجه‌های دیگر از طریق رابطه بالا بدست می‌آید. بنابراین، این روابط بدست آمده می‌توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_n \end{Bmatrix}_{,\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} & \frac{A}{R_\alpha} \\ \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} & 0 & 0 \\ -\frac{A}{R_\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_n \end{Bmatrix}$$

(1)

$$\begin{Bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_n \end{Bmatrix}_{,\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} & 0 \\ -\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} & 0 & \frac{B}{R_\beta} \\ 0 & -\frac{B}{R_\beta} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_n \end{Bmatrix}$$

روابط (Gauss-Codazzi)

در این بخش، ارتباط میان A ، B ، R_α و R_β بدست می‌آید زیرا آن‌ها هندسه صحیح بر سطح میانی

وجود دارند. این روابط اساساً بر پایه روابط $i_{n,\alpha\beta} = i_{\alpha,\alpha\beta}$ و رابطه $i_{n,\alpha\beta} = i_{\alpha,\beta\alpha}$

$$\hat{i}_{\alpha, \beta} = \hat{i}_{\beta, \alpha} \quad \text{براسته می آید:}$$

$$\begin{aligned} \hat{i}_{\alpha, \alpha\beta} &= \hat{i}_{\alpha, \beta\alpha} \\ \rightarrow \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_\alpha} \hat{i}_\alpha \right) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{R_\beta} \hat{i}_\beta \right) \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_\alpha} \right) \hat{i}_\alpha + \frac{A}{R_\alpha} \hat{i}_{\alpha, \beta} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{R_\beta} \right) \hat{i}_\beta + \frac{B}{R_\beta} \hat{i}_{\beta, \alpha} \\ \rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_\alpha} \right) - \frac{1}{R_\beta} A_{, \beta} \right] \hat{i}_\alpha &= \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{R_\beta} \right) - \frac{1}{R_\alpha} B_{, \alpha} \right] \hat{i}_\beta \end{aligned}$$

بنابر این عبارات دو سمت رابطه باید برابر باشند. در نتیجه:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{R_\beta} \right) = \frac{1}{R_\alpha} B_{, \alpha} & (1) \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_\alpha} \right) = \frac{1}{R_\beta} A_{, \beta} & (2) \end{cases}$$

این دو رابطه تحت عنوان شرطهای Codazzi شناخته می شوند.

از سورا دیگر:

$$\hat{i}_{\alpha, \alpha\beta} = \hat{i}_{\alpha, \beta\alpha}$$

با استفاده از نتایج آشکار شده در روابط ماتریسی انتگرال صفر قبلی:

$$\rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} B_{, \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} A_{, \beta} \right) + \frac{AB}{R_\alpha R_\beta} \right] \hat{i}_\beta = \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_\alpha} \right) - \frac{1}{R_\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right] \hat{i}_\alpha$$

در نتیجه باید:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} B_{, \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} A_{, \beta} \right) + \frac{AB}{R_\alpha R_\beta} = 0 \quad (3)$$

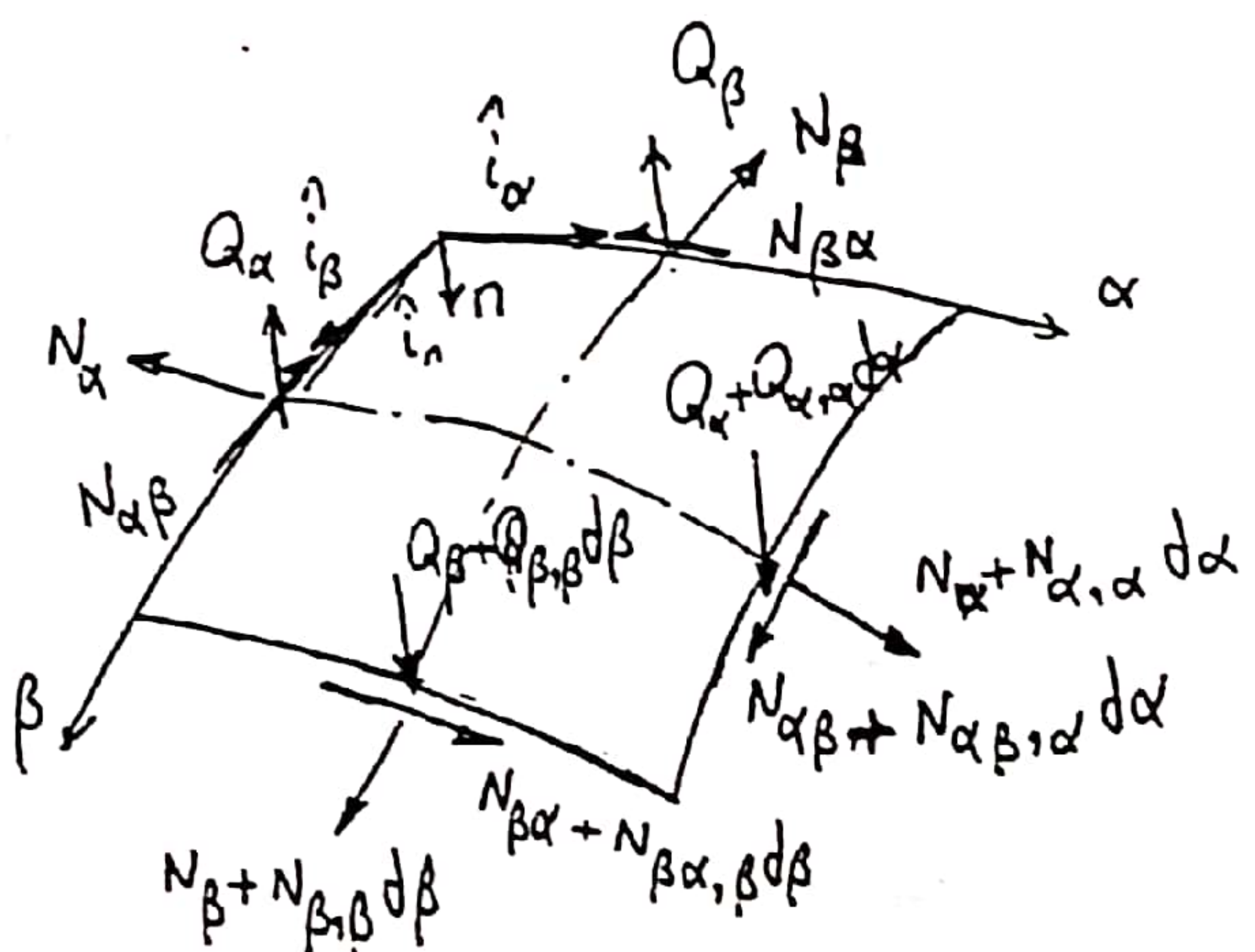
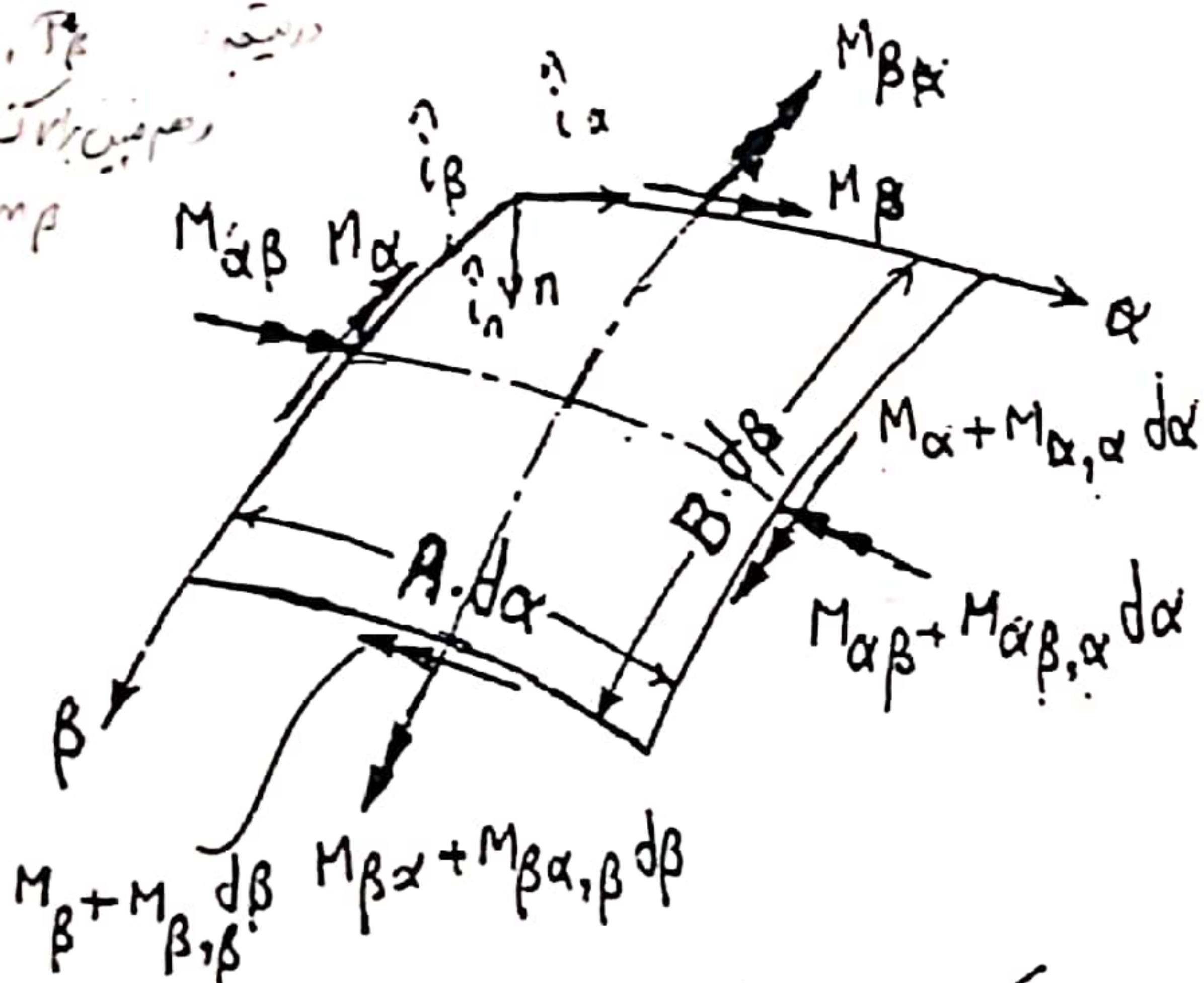
رابطه ناسی از صفر بودن عبارت سمت راست رابطه، قبلاً در شرطهای Codazzi آشکار شده بود. استفاده از نتایج و $\hat{i}_{\alpha, \alpha\beta} = \hat{i}_{\alpha, \beta\alpha}$ تا آخر جدید همراه ندارد. رابطه آخر را شرط (Gauss) می نامند.

$0,0,0 \rightarrow$ Godazzi-Mainardi-Gauss

معادلات حاکم بر پوسته در حالت دینامیکی

پارکته خارج پوسته است تا بل فرقی نداشته باشد

در نتیجه $P_\alpha, P_\alpha, P_\beta$
رسم فین برای کشش و فشارها
 $m_\alpha, m_\alpha, m_\beta$



در شکل بالا بر سر آشکارترین نیروها و گستره ها بر اساس المان، این واکنش در دو شکل مجزا نشان داده اند. جهت مثبت نیروها، جهت مثبت تنشها است.

در حالت کلی، نیروهای گسترده خارجی که مجموعی از شدت نیروهای جبری و شدت نیروهای سطحی است، در دراز سازه مرتب شده و فرض می‌گردد که بر سطح میانی پوسته وارد آید.

$$\vec{p} = \vec{p}_\alpha \hat{i}_\alpha + \vec{p}_\beta \hat{i}_\beta + \vec{p}_n \hat{i}_n \quad (2)$$

به طریقی که به شدت گسترده خارجی (گسترده بر واحد سطح) را می‌توان به گونه زیر نشان داد:

$$\vec{m} = m_\alpha \hat{i}_\alpha + m_\beta \hat{i}_\beta + m_n \hat{i}_n \quad (3)$$

و این نیروها را مؤثر بر لبه‌های α ثابت و β ثابت را به ترتیب با $\vec{F}_\alpha$ و $\vec{F}_\beta$ نشان می‌دهیم. بدین ترتیب:

$$\begin{cases} \vec{F}_\alpha = (N_\alpha \hat{i}_\alpha + N_{\alpha\beta} \hat{i}_\beta + Q_\alpha \hat{i}_n) B d\beta \\ \vec{F}_\beta = (N_{\beta\alpha} \hat{i}_\alpha + N_\beta \hat{i}_\beta + Q_\beta \hat{i}_n) A d\alpha \end{cases} \quad (4)$$

اگر میزان تغییر فرم پوسته نسبت به ضخامت و سطح آن ضعیف باشد (فرض Love)، آنگاه می‌توان فرض نمود که جهت نیروها و گسترده‌ها در مس‌ها با یکدیگر نیز عمود یا موازی لبه‌ها می‌ماند. از معادلات سینوسی (قانون دوک) :

$$(\vec{F}_\alpha + \vec{F}_{\alpha,\alpha} d\alpha) - \vec{F}_\alpha + (\vec{F}_\beta + \vec{F}_{\beta,\beta} d\beta) - \vec{F}_\beta + \vec{p} AB d\alpha d\beta = 0 \quad (5)$$

اگر مؤلفه‌های بار گسترده خارجی را با p_α ، p_β ، p_n نشان دهیم، آنگاه در حالت سینوسی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \vec{p}_\alpha &= p_\alpha - \rho t \ddot{u}_\alpha & \vec{p}_\beta &= p_\beta - \rho t \ddot{u}_\beta & \vec{p}_n &= p_n - \rho t \ddot{u}_n \end{aligned}$$

که در آن، t ضخامت پوسته و u_i جابجایی در جهت i است.

بنابراین:

$$\vec{F}_{\alpha,\alpha} d\alpha + \vec{F}_{\beta,\beta} d\beta + \vec{p} AB d\alpha d\beta = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} [(N_\alpha \hat{i}_\alpha + N_{\alpha\beta} \hat{i}_\beta + Q_\alpha \hat{i}_n) B d\beta] d\alpha + \frac{\partial}{\partial \beta} [(N_{\beta\alpha} \hat{i}_\alpha + N_\beta \hat{i}_\beta + Q_\beta \hat{i}_n) A d\alpha] d\beta$$

$$+ (p_\alpha \hat{i}_\alpha + p_\beta \hat{i}_\beta + p_n \hat{i}_n) AB d\alpha d\beta = \rho t AB d\alpha d\beta (\ddot{u}_\alpha \hat{i}_\alpha + \ddot{u}_\beta \hat{i}_\beta + \ddot{u}_n \hat{i}_n)$$

پس از تقسیم دو سمت رابطه بر $d\alpha d\beta$ و انجام عملیات مشتق‌گیری:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (B N_\alpha) \hat{i}_\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha} (B N_{\alpha\beta}) \hat{i}_\beta + \frac{\partial}{\partial \alpha} (B Q_\alpha) \hat{i}_n$$

$$+ N_\alpha B \cdot \hat{i}_{\alpha,\alpha} + N_{\alpha\beta} B \cdot \hat{i}_{\beta,\alpha} + B Q_\alpha \cdot \hat{i}_{n,\alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} (A N_{\beta\alpha}) \hat{i}_\alpha + \frac{\partial}{\partial \beta} (A N_\beta) \hat{i}_\beta + \frac{\partial}{\partial \beta} (A Q_\beta) \hat{i}_n$$

$$+ A N_{\beta\alpha} \hat{i}_{\alpha,\beta} + A N_\beta \hat{i}_{\beta,\beta} + A Q_\beta \hat{i}_{n,\beta} + AB (p_\alpha \hat{i}_\alpha + p_\beta \hat{i}_\beta + p_n \hat{i}_n) = \rho t AB (\ddot{u}_\alpha \hat{i}_\alpha + \ddot{u}_\beta \hat{i}_\beta + \ddot{u}_n \hat{i}_n)$$

و با توجه به رابطه مشتق بردارها که [رابطه (1)] و پس از مرتب نمودن عبارات:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (B N_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A N_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{\alpha\beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_\beta - \frac{AB}{R_\alpha} Q_\alpha + AB p_\alpha = \rho t AB \ddot{u}_\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (A N_\beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (B N_{\alpha\beta}) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{\beta\alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_\alpha - \frac{AB}{R_\beta} Q_\beta + AB p_\beta = \rho t AB \ddot{u}_\beta$$

$$\frac{AB}{R_\alpha} N_\alpha + \frac{AB}{R_\beta} N_\beta + \frac{\partial}{\partial \alpha} (B Q_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A Q_\beta) + AB p_n = \rho t AB \ddot{u}_n$$

(6)

معادلات تعادل نیرو در طول (ارتعاشات خطی)

برابر بدست آوردن روابط تعادل گسترده ها، برای هند گسترده ها و درجه های ثابت و ثابت را به ترتیب با $\vec{M}_\alpha$ و $\vec{M}_\beta$ نمایش می دهیم:

$$\begin{cases} \vec{M}_\alpha = (-M_{\alpha\beta} \hat{i}_\alpha + M_{\alpha\beta} \hat{i}_\beta) B.d\beta \\ \vec{M}_\beta = (-M_{\beta\alpha} \hat{i}_\alpha + M_{\beta\alpha} \hat{i}_\beta) A.d\alpha \end{cases} \quad (7)$$

با جمع برداری از هند گسترده ها نیروی و ناریه گرفتن حاصل می شود در خواصی مرتبه بالا گسترده ها را که حاصل ضرب دیوانی ها بر بسته می در آن آنگاه گردند، داریم:

$$[\vec{M}_\alpha + \vec{M}_{\alpha,\alpha} d\alpha] - \vec{M}_\alpha + [\vec{M}_\beta + \vec{M}_{\beta,\beta} d\beta] - \vec{M}_\beta + [Q_\beta \hat{i}_\alpha - Q_\alpha \hat{i}_\beta - (N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha}) \hat{i}_n] \cdot \vec{m} \cdot AB.d\alpha.d\beta + \vec{m} \cdot AB.d\alpha.d\beta = 0$$

$$\vec{M}_{\alpha,\alpha} d\alpha + \vec{M}_{\beta,\beta} d\beta + [Q_\beta \hat{i}_\alpha - Q_\alpha \hat{i}_\beta + (N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha}) \hat{i}_n] \cdot \vec{m} \cdot AB.d\alpha.d\beta + \vec{m} \cdot AB.d\alpha.d\beta = 0$$

پس از جایگزینی روابط (3) و (7) در رابطه بالا، تقسیم دو طرف تادی بر $d\alpha.d\beta$ و استفاده از روابط (1)،

نتیجه زیر حاصل می گردد:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (B M_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A M_\beta) + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{\alpha\beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta - AB Q_\alpha + AB m_\beta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} (A M_\beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (B M_\alpha) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{\beta\alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\alpha - AB Q_\beta + AB m_\alpha = 0 \quad (8)$$

معادلات تعادل دینامیک گسترده ها

(ارتباطات بیضی)

$$N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha} - \frac{M_{\alpha\beta}}{R_\alpha} + \frac{M_{\beta\alpha}}{R_\beta} + m_n = 0$$

که باید در سمت راست معادلات هم I_α ، I_β و I_n را در نظر گرفت.

روابط نیرو و گسترده ها بر واحد طول

که تمام طول ها طول لایه میانی

معادلات کلاسیک حاکم بر پوسته بر پایه فرضیه Kirchhoff - Love که شبیه به

فرضیه Kirchhoff در ورق می باشد و به گونه زیر می باشد، بدست می آیند:

- 1- سطوح مقطع عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری نیز صفحه ای و عمود بر لایه میانی جدید خواهد بود. از این فرض می توان نتیجه گرفت که:

$$\gamma_{\alpha z} = \gamma_{\beta z} = 0$$

- 2- ضخامت پوسته در هیچ بارگذاری ثابت می ماند. در نتیجه:

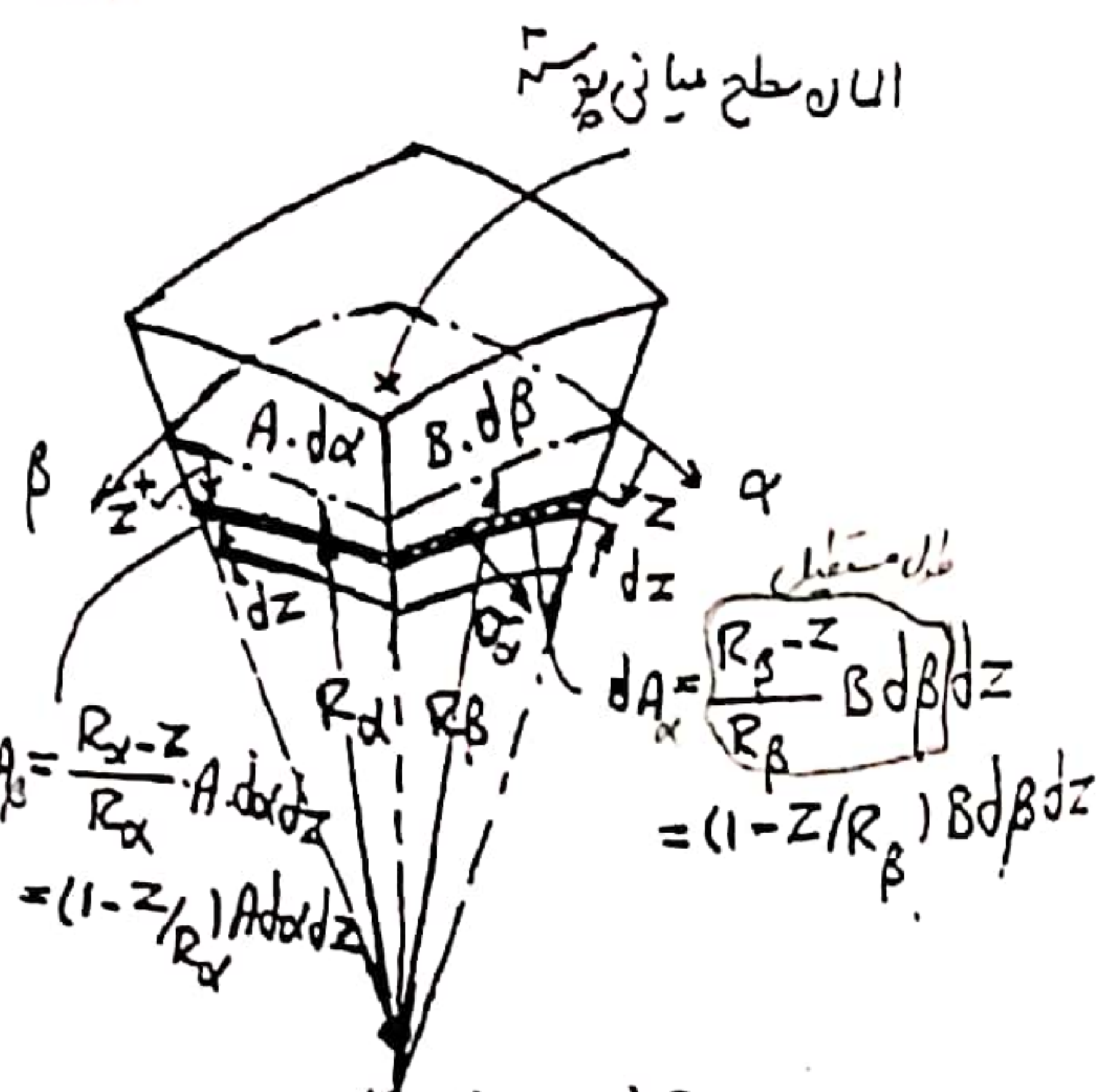
$$\epsilon_z = 0$$

- 3- تنش قائم عرضی ناچیز است ($\sigma_z = 0$).

- 4- ضخامت پوسته بسیار کوچکتر از شعاع انحنای اصلی سطح می باشد. ($\frac{z}{R_\alpha}, \frac{z}{R_\beta} \ll 1$).

بنابراین، با توجه به فرضیه بالا و تعریف نیرو و گسترده ها بر واحد طول و با توجه به اینکه طول المان سطح در فاصله z از لایه میانی، متناسب با طول لایه میانی است و طول المان متناسب با فاصله شعاعی از مرکز انحنای می باشد. به بیان دیگر، طول المان سطح به نسبت $\frac{R_\alpha - z}{R_\alpha} = 1 - z/R_\alpha$ در صفحه $\alpha - n$ و به نسبت $\frac{R_\beta - z}{R_\beta} = 1 - z/R_\beta$ با طول لایه

سطح میانی متناسب است، می توان نوشت:



$$\begin{Bmatrix} N_\alpha \\ N_{\alpha\beta} \\ Q_\alpha \end{Bmatrix} = \left(\int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\alpha \\ \tau_{\alpha\beta} \\ \tau_{\alpha z} \end{Bmatrix} \cdot dA \right) / (B \cdot d\beta) \\ = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\alpha \\ \tau_{\alpha\beta} \\ \tau_{\alpha z} \end{Bmatrix} \left(1 - \frac{z}{R_\beta}\right) \cdot dz$$

(dA) (تغییرات حسیاس A)

رابطه A در دایره یکسان سطح است

(9-a)

به طر، به:

$$\begin{Bmatrix} N_\beta \\ N_{\beta\alpha} \\ Q_\beta \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\beta \\ \tau_{\beta\alpha} \\ \tau_{\beta z} \end{Bmatrix} \left(1 - \frac{z}{R_\alpha}\right) \cdot dz$$

(9-b)

: 9

$$\begin{Bmatrix} M_\alpha \\ M_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\alpha \\ \tau_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} \left(1 - \frac{z}{R_\beta}\right) \cdot z \cdot dz$$

(9-c)

$$\begin{Bmatrix} M_\beta \\ M_{\beta\alpha} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\beta \\ \tau_{\beta\alpha} \end{Bmatrix} \left(1 - \frac{z}{R_\alpha}\right) \cdot z \cdot dz$$

اگر از فرض Love-Timoshenko استفاده کنیم فرض: $\left(\frac{z}{R_\alpha}, \frac{z}{R_\beta}\right) \ll 1$

$$\begin{Bmatrix} N_\alpha \\ N_{\alpha\beta} \\ Q_\alpha \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\alpha \\ \tau_{\alpha\beta} \\ \tau_{\alpha z} \end{Bmatrix} \cdot dz$$

$$\begin{Bmatrix} N_\beta \\ N_{\beta\alpha} \\ Q_\beta \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\beta \\ \tau_{\beta\alpha} \\ \tau_{\beta z} \end{Bmatrix} \cdot dz$$

$$\begin{Bmatrix} M_\alpha \\ M_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\alpha \\ \tau_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz$$

$$\begin{Bmatrix} M_\beta \\ M_{\beta\alpha} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\beta \\ \tau_{\beta\alpha} \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz$$

از رابطه (9) می‌دانستیم که در حالت کلی، اگر از تئوری تنش استفاده کنیم $(\sigma_\alpha = \sigma_\beta)$:

$$N_{\alpha\beta} \neq N_{\beta\alpha} \quad M_{\alpha\beta} \neq M_{\beta\alpha}$$

که این مطلب بر اثر حاکمیت تنش در تئوری تنش می‌باشد نیز قابل تعمیم است، مگر آنکه از فرض Love-Timoshenko (استفاده کنیم). تنها با این تویب است که می‌توان نوشت:

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} \quad M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$$

اکنون رابطه آخر از روابط (8) را بررسی می‌کنیم:

$$N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha} - \frac{M_{\alpha\beta}}{R_\alpha} + \frac{M_{\beta\alpha}}{R_\beta} + m_n = 0$$

$$\rightarrow \int_{-t/2}^{t/2} (\tau_{\alpha\beta} - \tau_{\beta\alpha}) \cdot \left(1 - \frac{z}{R_\alpha}\right) \left(1 - \frac{z}{R_\beta}\right) dz + m_n = 0$$

بنابراین، اگر $m_n = 0$ باشد،

به بیانه دیگر، در حالت کلی، $\sigma_\alpha \neq \sigma_\beta$ (یا $\tau_{\alpha\beta} \neq \tau_{\beta\alpha}$) است. یعنی تنش همواره متقارن نیست. در بخش‌های آینده، از فرض $m_n = 0$ بهره می‌گیریم. در نتیجه می‌توان از فرض متقارن بودن تنش استفاده نمود. به طور کلی، وجود گشتاور پیچشی گسترده بر یک سطح (پیرامون محور عمود بر سطح)، موجب نابرابری تنش بر سطح مؤثر بر لبه‌ها را که سطح خواهد بود.

روابط حاکم بر دو سازه در درازای تغییرات طول در جهات استاتیکی

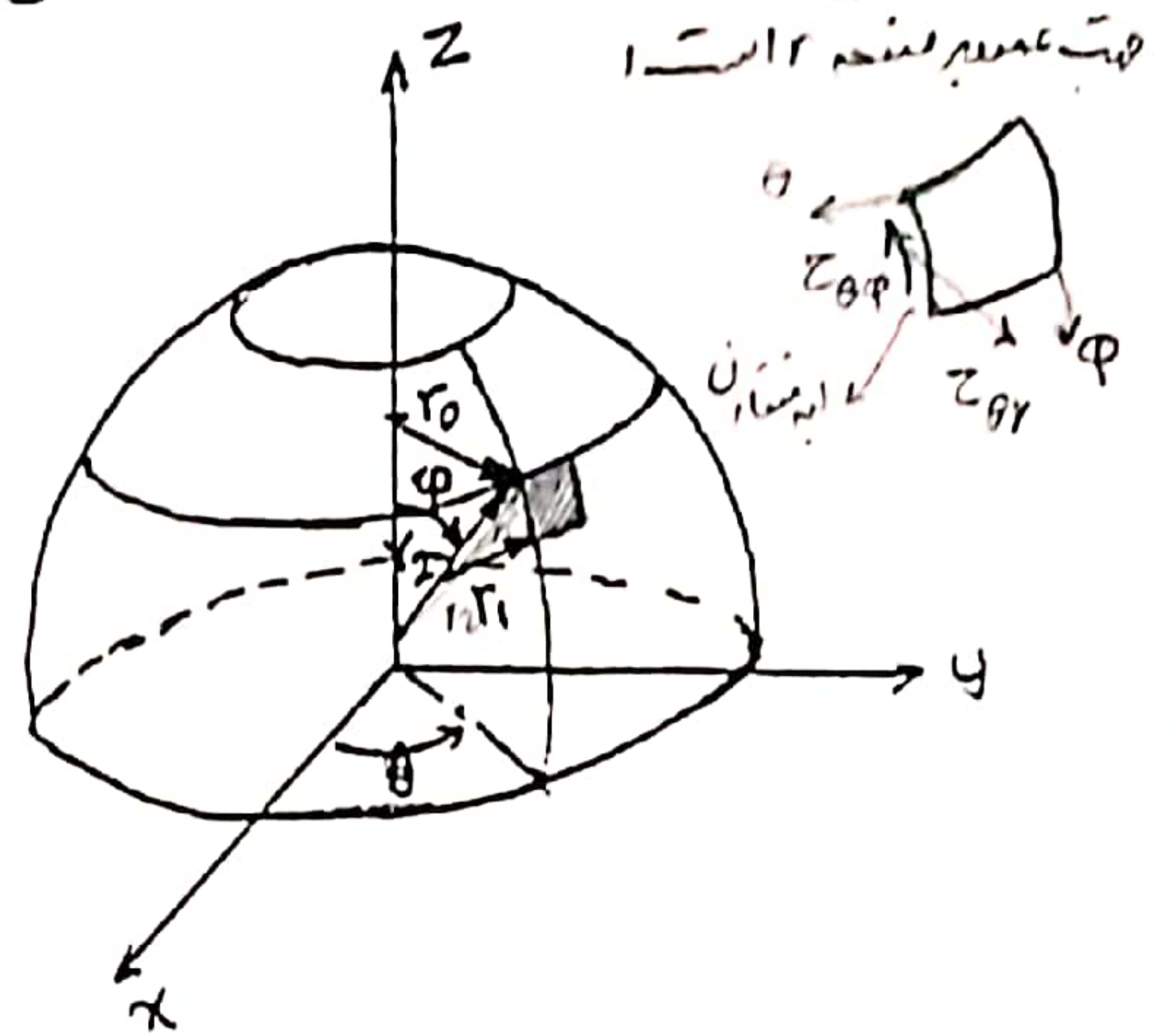
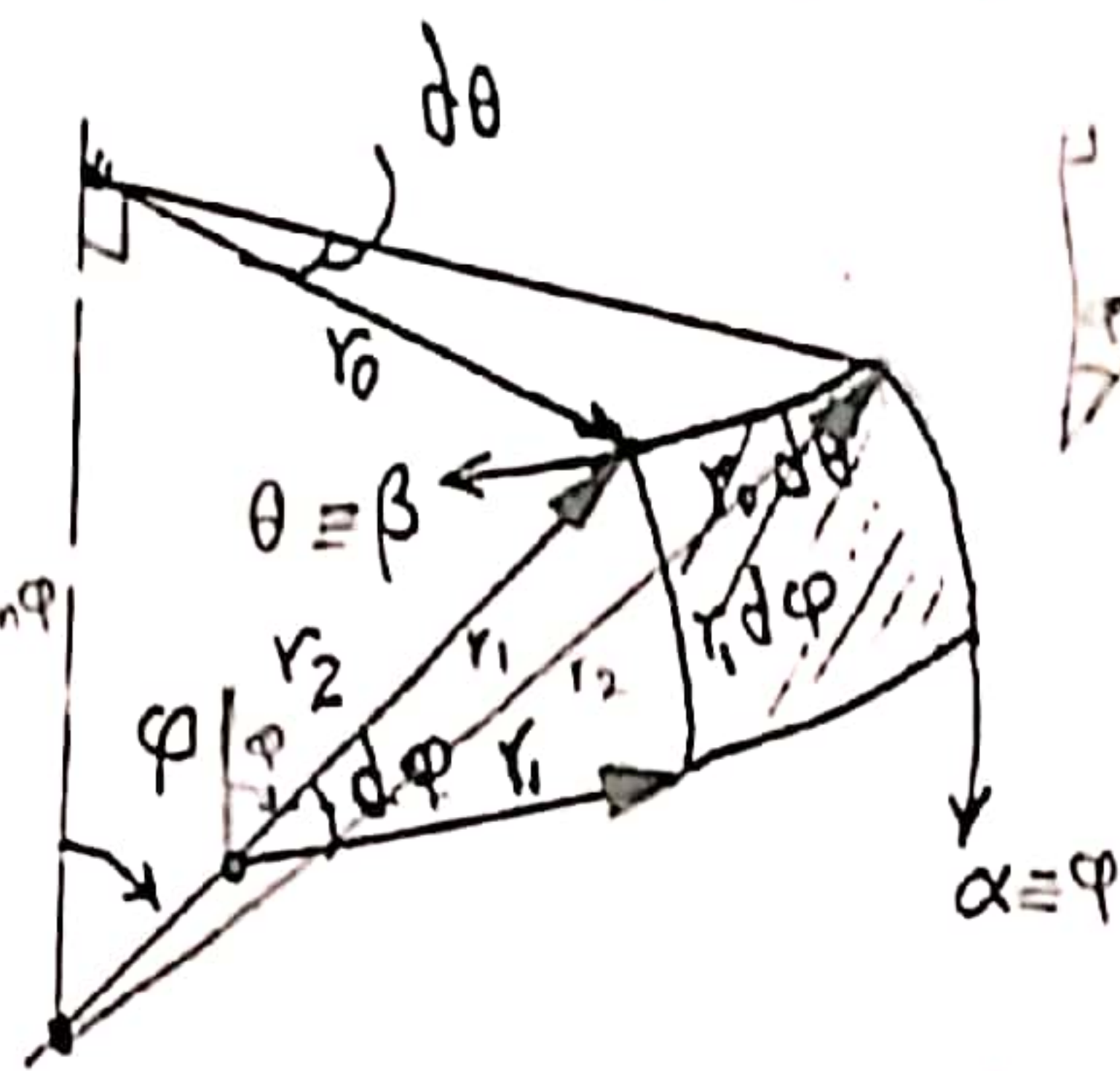
مستقیم است و به صورت یک خط است (استاتیکی)

$$A_{,\alpha} = r_1, \varphi$$

$$A_{,\beta} = r_1, \theta = 0$$

$$B_{,\alpha} = r_2, \varphi = r_2 \cos \varphi + r_2 \sin \varphi$$

$$B_{,\beta} = r_2, \theta = 0$$



در این حالت، مانند شکل، مختصات به فرم $\alpha = \varphi$ ، $\beta = \theta$ انتخاب می‌کنند. و چون بر پایه تغییرات طول در

$$d\vec{r} = r_1 d\varphi \hat{e}_\alpha + r_2 d\theta \hat{e}_\beta$$

$$= A d\alpha \hat{e}_\alpha + B d\beta \hat{e}_\beta$$

$$\rightarrow A = r_1, \quad B = r_2 = r_2 \cdot \sin \varphi$$

$$R_\alpha = r_1, \quad R_\beta = r_2, \quad \frac{\partial B}{\partial \alpha} = \frac{\partial r_2}{\partial \varphi} = r_2 \cos \varphi \xrightarrow{\text{از شرط}} \frac{\partial r_2}{\partial \theta} = \frac{\partial r_1}{\partial \theta} = \frac{\partial A}{\partial \beta} = 0 = \frac{\partial B}{\partial \beta} \quad (10)$$

در نتیجه روابط (6) و (8) با حجم یونی از رابطه آخر از روابط (8) که به دلیل $m_n = 0$ به خودی خود برآورده می‌گردد، به فرم زیر تبدیل خواهند کرد و فرض بر آنست که تنها هندسه و نه بارگذارد در این تغییرات دو برابر است:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_2 \cdot N_\varphi) + r_1 N_{\varphi, \theta} - r_1 \cos \varphi N_\theta - r_2 Q_\varphi + r_1 r_2 p_\varphi = \rho t r_1 r_2 \ddot{u}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_2 N_{\varphi, \theta}) + r_1 N_{\theta, \theta} + r_1 \cos \varphi \cdot N_{\varphi, \theta} - r_1 \sin \varphi \cdot Q_\theta + r_1 r_2 p_\theta = \rho t r_1 r_2 \ddot{v}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_2 Q_\varphi) + r_1 Q_{\theta, \theta} + r_2 N_\varphi + r_1 \sin \varphi N_\theta + r_1 r_2 p_n = \rho t r_1 r_2 \ddot{w} \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_2 M_\varphi) + r_1 M_{\varphi, \theta} - r_1 \cos \varphi \cdot M_\theta - r_2 r_1 Q_\varphi + r_1 r_2 m_\theta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (r_2 M_{\varphi, \theta}) + r_1 M_{\theta, \theta} + r_1 \cos \varphi \cdot M_{\varphi, \theta} - r_2 r_1 Q_\theta + r_1 r_2 m_\varphi = 0$$

$$p_\theta, m_\theta = 0$$

* بارگذاری مستقیم

در این تغییرات نیروی برشی صاف

$$z_{\theta \varphi} = 0 \rightarrow N_{\theta \varphi}, M_{\theta \varphi} = 0$$

$$z_{r \theta} = 0 \rightarrow Q_\theta = 0$$

اگر بارگذارد نیز مستقیم باشد، مشتقات N_i و M_i و Q_i نسبت به θ صفر خواهد گردید. و مقدار $Q_{\theta \varphi}$ ، $N_{\theta \varphi}$ و $M_{\theta \varphi}$ نیز صفر گردد و صفر شدن p_θ و m_θ بر اثر تغییرات ضربه است. در این حالت:

$$\frac{d}{d\varphi} (r_2 \cdot N_\varphi) - r_1 \cos \varphi \cdot N_\theta - r_2 Q_\varphi + r_2 r_1 p_\varphi = \rho t r_1 r_2 \ddot{u}$$

$$\frac{d}{d\varphi} (r_2 Q_\varphi) + r_2 N_\varphi + r_1 \sin \varphi \cdot N_\theta + r_2 r_1 p_n = \rho t r_1 r_2 \ddot{w} \quad (12)$$

$$\frac{d}{d\varphi} (r_2 M_\varphi) - r_1 \cos \varphi \cdot M_\theta - r_2 r_1 Q_\varphi = 0$$

$$\ddot{v} = 0 = \ddot{u}_\theta$$

$$m_\varphi = 0$$

و معادلات (12) و (11) به خودی خود برآورده می‌شوند و معلوم می‌گردد که m_φ نیز باید برابر با صفر باشد.

به علت اینکه مشتق بار نسبت به θ نیز صفر است

$$\rightarrow m_\varphi = 0$$

روابط کهنر و اخضا

در یادداشت‌های کهنر، کهنر نقطه‌ای را با فاصله z از سطح میانی به سمت بالا فرض می‌کند که یک 10% از رابط
در جهت مرکز است. [در روابط زیر $U=u, V=v, W=w$]:

$$\epsilon_\alpha = \frac{1}{1-z/R_\alpha} \left(\frac{1}{A} U_{,\alpha} + \frac{V}{AB} A_{,\beta} - \frac{W}{R_\alpha} \right)$$

$$\epsilon_\beta = \frac{1}{1-z/R_\beta} \left(\frac{U}{AB} B_{,\alpha} + \frac{V_{,\beta}}{B} - \frac{W}{R_\beta} \right)$$

(13)

$$\epsilon_z = W_{,z}$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{A(1-z/R_\alpha)}{B(1-z/R_\beta)} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{U}{A(1-z/R_\alpha)} \right] + \frac{B(1-z/R_\beta)}{A(1-z/R_\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{V}{B(1-z/R_\beta)} \right]$$

$$\gamma_{\alpha z} = \frac{-W_{,\alpha}}{A(1-z/R_\alpha)} - A(1-z/R_\alpha) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{U}{A(1-z/R_\alpha)} \right]$$

$$\gamma_{\beta z} = \frac{-W_{,\beta}}{B(1-z/R_\beta)} - B(1-z/R_\beta) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{V}{B(1-z/R_\beta)} \right]$$

در تئوری کلاسیک - به سمت تغییر شکل طبق فرض (Love - Kirchhoff) به فرم زیر بیان می‌کنند:

$$U(\alpha, \beta, z) = u(\alpha, \beta) - z \theta_\alpha(\alpha, \beta)$$

(14)

$$V(\alpha, \beta, z) = v(\alpha, \beta) - z \theta_\beta(\alpha, \beta)$$

$$W(\alpha, \beta, z) = w(\alpha, \beta)$$

که در آن u, v, w تغییر مکان سطح میانی، $\theta_\alpha, \theta_\beta$ دوران برحایس خطوط عمود بر سطح میانی است. $\alpha-z$ و $\beta-z$ مرتبه‌ها هستند. یعنی:

$$\theta_\alpha = -U_{,z}, \quad \theta_\beta = -V_{,z}$$

در نتیجه، برای آنکه طبق فرضیات تئوری کلاسیک:

$$\gamma_{\alpha z} = \gamma_{\beta z} = \epsilon_z = 0$$

گردد، باید:

$$\theta_\alpha = \frac{u}{R_\alpha} + \frac{1}{A} w_{,\alpha}$$

$$\theta_\beta = \frac{v}{R_\beta} + \frac{1}{B} w_{,\beta}$$

(15)

در نتیجه، اگر عبارات کهنر را به فرم زیر بنویسیم:

$$\epsilon_\alpha = \frac{1}{1-z/R_\alpha} (e_\alpha - z k_\alpha)$$

$$\epsilon_\beta = \frac{1}{1-z/R_\beta} (e_\beta - z k_\beta)$$

(16)

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{(1-z/R_\alpha)(1-z/R_\beta)} \left[\left(1 - \frac{z^2}{R_\alpha R_\beta}\right) e_{\alpha\beta} - z \left(1 + \frac{z}{2R_\alpha} - \frac{z}{2R_\beta}\right) k_{\alpha\beta} \right]$$

که در آن $e_\alpha, e_\beta, e_{\alpha\beta}$ که تغییر لایه میانی است و $k_\alpha, k_\beta, k_{\alpha\beta}$ ویرا هستند:

$$e_\alpha = \frac{1}{A} u_{,\alpha} + \frac{v}{AB} A_{,\beta} = \frac{w}{R_\alpha} \quad (17)$$

$$e_\beta = \frac{u}{AB} B_{,\alpha} + \frac{1}{B} v_{,\beta} = \frac{w}{R_\beta}$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right)$$

و $k_\alpha, k_\beta, k_{\alpha\beta}$ تغییرات اختصار باشند:

$$k_\alpha = \frac{1}{A} \theta_{\alpha,\alpha} + \frac{\theta_\beta}{AB} A_{,\beta} \quad (18)$$

$$k_\beta = \frac{\theta_\alpha}{AB} B_{,\alpha} + \frac{1}{B} \theta_{\beta,\beta}$$

$$k_{\alpha\beta} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\theta_\alpha}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\theta_\beta}{B} \right) + \frac{1}{R_\alpha} \left(\frac{1}{B} u_{,\beta} - \frac{v}{AB} B_{,\alpha} \right) + \frac{1}{R_\beta} \left(\frac{1}{A} v_{,\alpha} - \frac{u}{AB} A_{,\beta} \right)$$

اگر از فرض Love-Timoshenko که میان بردار داریم $\left(\frac{z}{R_\alpha}, \frac{z}{R_\beta} \ll 1 \right)$ استفاده اختیار کردیم، استوانه کنیم، آنگاه می توان نوشت:

$$\epsilon_\alpha = e_\alpha - z k_\alpha \quad \epsilon_\beta = e_\beta - z k_\beta \quad \epsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} - z k_{\alpha\beta} \quad (19)$$

که در آن $e_\alpha, e_\beta, e_{\alpha\beta}, k_\alpha, k_\beta, k_{\alpha\beta}$ از حال روابط قبلی بدست می آیند. در حقیقت، فرض Timoshenko اثر اختصار بر روابط را حذف و روابط را نسبت به روابط بدست می آید. فرض روابط در سیستم مختصات دایره ای تغییرات دور از لحاظ شکل هندسی به گونه زیر خواهد بود: در نظر بگیرید.

$$e_\varphi = \frac{1}{r_1} u_{,\varphi} - \frac{w}{r_1} = \frac{1}{r_1} (u_{,\varphi} - w)$$

$$e_\theta = \frac{u}{r_0} \cos \varphi + \frac{1}{r_0} v_{,\theta} - \frac{w}{r_0 \sin \varphi} = \frac{u}{r_2} \cot \varphi + \frac{1}{r_2} \frac{v_{,\theta}}{\sin \varphi} - \frac{w}{r_2}$$

$$e_{\theta\varphi} = \frac{1}{r_0} u_{,\theta} + \frac{r_0}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v}{r_0} \right) = \frac{u_{,\theta}}{r_2 \sin \varphi} + \frac{r_2 \sin \varphi}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v}{r_0} \right) \quad (20)$$

$$k_\varphi = \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{r_1} + \frac{1}{r_1} w_{,\varphi} \right)$$

$$k_\theta = (u + w_{,\varphi}) \frac{\cot \varphi}{r_1 r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{r_2} + \frac{1}{r_0} w_{,\theta} \right) \\ = (u + w_{,\varphi}) \frac{\cot \varphi}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2^2 \sin \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(v + \frac{w_{,\theta}}{\sin \varphi} \right)$$

$$k_{\theta\varphi} = \frac{1}{r_0 r_1} \frac{\partial}{\partial \theta} (u + w_{,\varphi}) + \frac{r_0}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v}{r_0 r_2} + \frac{1}{r_0^2} w_{,\theta} \right) + \frac{1}{r_0 r_1} (u_{,\theta} - v \cdot \cot \varphi) \\ + \frac{1}{r_2 r_1} (v_{,\varphi})$$

اگر بارگذاری نیز متقارن باشد، مشتقات مؤلفه ها را با جانی و نیز v صفر خواهد گردید. به گونه ای که عبارات غیر صفر:

$$e_\varphi = \frac{u_{,\varphi}}{r_1} - \frac{w}{r_1} = \frac{1}{r_1} (u_{,\varphi} - w)$$

$$e_\theta = \frac{1}{r_2} (u \cot \varphi - w)$$

$$k_\varphi = \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{r_1} + \frac{w_{,\varphi}}{r_1} \right)$$

$$k_\theta = (u + w_{,\varphi}) \frac{\cot \varphi}{r_1 r_2}$$

$$e_{\theta\varphi} = k_{\theta\varphi} = 0$$

بررسی ماکزیمم و مینیمم در حالت استاتیکی

بر سته استاتیکی

در اینجا:

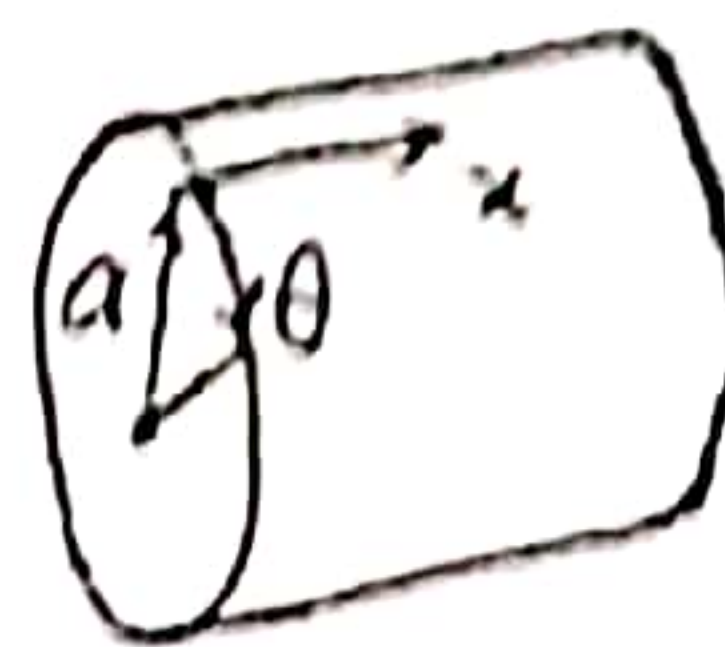
$$\varphi \equiv \alpha \equiv x \quad \beta \equiv \theta \quad A \equiv 1 \quad B \equiv a$$

$$r_1 = R_x = \infty \quad r_2 = R_\beta = a = r_0$$

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha} = \frac{\partial B}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial A}{\partial \beta} = 0$$

در سته، از روابط (11) ... برای حالت استاتیکی:



$$\varphi = 90$$

$$\cos \varphi = 0$$

$$\sin \varphi = 1$$

$$\begin{cases} a \cdot N_{x,x} + N_{x\theta,\theta} + a p_x = 0 \\ N_{\theta,\theta} + a N_{x\theta,x} - Q_\theta + a p_\theta = 0 \\ N_\theta + a Q_{x,x} + Q_{\theta,\theta} + a p_n = 0 \\ a M_{x,x} + M_{x\theta,\theta} - a Q_x + a m_\theta = 0 \\ M_{\theta,\theta} + a M_{x\theta,x} - a Q_\theta + a m_x = 0 \end{cases}$$

$$e_x = u_{,x} \quad , \quad e_\theta = \frac{1}{a} v_{,\theta} - \frac{w}{a} = \frac{1}{a} (v_{,\theta} - w) \quad , \quad e_{x\theta} = \frac{u_{,\theta}}{a} + v_{,x}$$

$$k_x = w_{,xx} \quad , \quad k_\theta = \frac{1}{a^2} (v_{,\theta} + w_{,\theta\theta}) \quad , \quad k_{x\theta} = \frac{2}{a} (v_{,x} + w_{,x\theta})$$

$$\alpha \equiv x \quad \beta \equiv \theta \quad A \equiv 1 \quad B = x \cdot \sin \alpha \equiv r_0$$

$$r_1 = R_\alpha = \infty \quad r_2 = R_\beta = x \cdot \tan \alpha$$

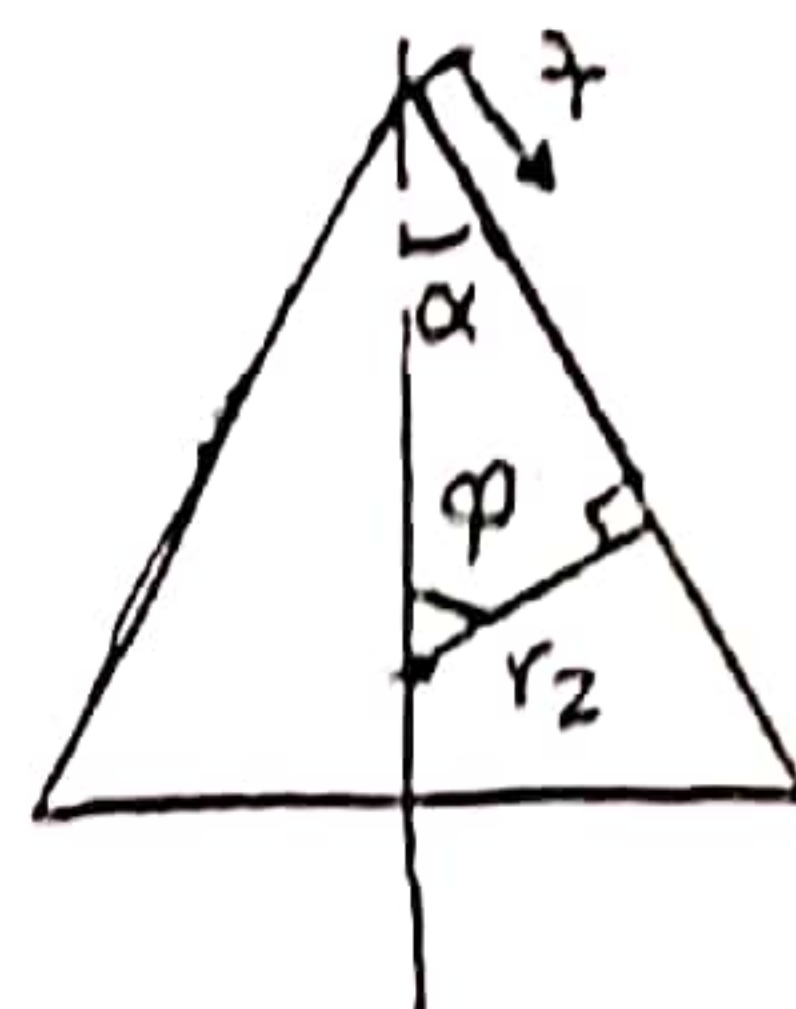
$$r_2 = R_\beta = x \cdot \tan \alpha$$

در سته، برای حالت استاتیکی:

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial A}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha} = \sin \alpha$$

$$\frac{\partial B}{\partial \beta} = 0$$



$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

در اینجا:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (x \cdot N_x) \sin \alpha + N_{x\theta,\theta} - N_\theta \sin \alpha + x \sin \alpha \cdot p_x = 0 \\ N_{\theta,\theta} + \frac{\partial}{\partial x} (x \cdot N_{x\theta}) \sin \alpha + N_{x\theta} \sin \alpha - Q_\theta \cos \alpha + x \sin \alpha \cdot p_\theta = 0 \\ N_\theta \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial x} (x \cdot Q_x) \sin \alpha + Q_{\theta,\theta} + x \sin \alpha \cdot p_n = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (x \cdot M_x) \sin \alpha + M_{x\theta,\theta} - M_\theta \sin \alpha - x \sin \alpha \cdot Q_x + x \sin \alpha \cdot m_\theta = 0 \\ M_{\theta,\theta} + \frac{\partial}{\partial x} (x \cdot M_{x\theta}) \sin \alpha + M_{\theta x} \sin \alpha - x \sin \alpha \cdot Q_\theta + x \sin \alpha \cdot m_x = 0 \end{cases}$$

$$e_x = u_{,x} \quad , \quad e_\theta = \frac{u}{x} + \frac{v_{,\theta}}{x \cdot \sin \alpha} - \frac{w}{x \cdot \tan \alpha} = \frac{1}{x \sin \alpha} (u \cdot \sin \alpha + v_{,\theta} - w \cos \alpha)$$

$$e_{x\theta} = \frac{u_{,\theta}}{x \cdot \sin \alpha} + x \cdot \sin \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{x \cdot \sin \alpha} \right) = v_{,x} - \frac{1}{x \cdot \sin \alpha} (v \cdot \sin \alpha - u_{,\theta})$$

$$k_x = w_{,xx}$$

$$k_\theta = \frac{w_{,\theta\theta}}{x} + \frac{v_{,\theta}}{x^2 \tan \alpha \sin \alpha} + \frac{1}{x^2 \sin^2 \alpha} w_{,\theta\theta} \quad (10)$$

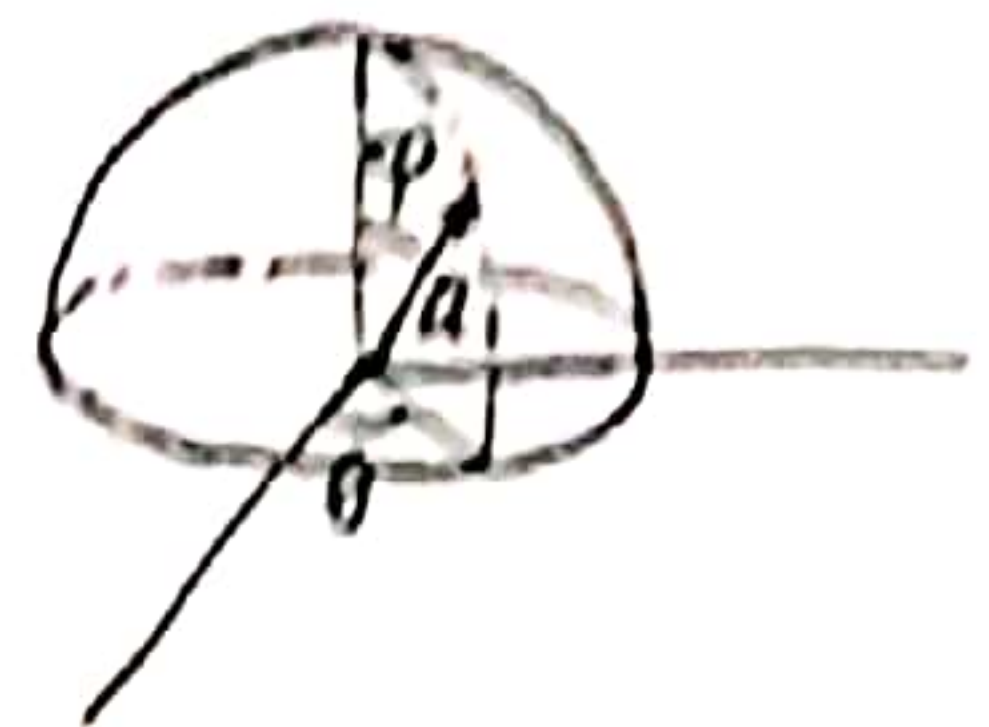
$$k_{x\theta} = \frac{1}{x \sin \alpha} (w_{,x\theta}) + \frac{x \partial}{\partial x} \left(\frac{v}{x \tan \alpha} + \frac{1}{x^2 \sin \alpha} w_{,\theta} \right) + \frac{v_{,x}}{x \tan \alpha}$$

درست است

$$\alpha = \varphi \quad \beta = \theta \quad r_1 = r_2 = a \quad r_0 = a \cdot \sin \varphi$$

$$A = a \quad B = r_0 = a \cdot \sin \varphi$$

در اینجا روابط (11) را داریم:



$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\varphi} \cdot \sin \varphi) + N_{\varphi, \theta} - N_{\theta} \cdot \cos \varphi - Q_{\varphi} \cdot \sin \varphi + a \cdot \sin \varphi \cdot \rho_{\varphi} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\theta} \cdot \sin \varphi) + N_{\theta, \theta} + N_{\varphi, \theta} \cos \varphi - Q_{\theta} \cdot \sin \varphi + a \sin \varphi \cdot \rho_{\theta} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (Q_{\varphi} \cdot \sin \varphi) + Q_{\theta, \theta} + N_{\varphi} \cdot \sin \varphi + N_{\theta} \cdot \sin \varphi + a \cdot \sin \varphi \cdot \rho_{\theta} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (M_{\varphi} \cdot \sin \varphi) + M_{\varphi, \theta} - M_{\theta} \cdot \cos \varphi - a Q_{\varphi} \cdot \sin \varphi + a \cdot \sin \varphi \cdot m_{\theta} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (M_{\theta} \cdot \sin \varphi) + M_{\theta, \theta} + M_{\varphi, \theta} \cdot \cos \varphi - a Q_{\theta} \cdot \sin \varphi + a \cdot \sin \varphi \cdot m_{\varphi} &= 0 \end{aligned} \right.$$

و از روابط (20):

$$e_{\varphi} = \frac{1}{a} u_{, \varphi} - \frac{w}{a} = \frac{1}{a} (u_{, \varphi} - w)$$

$$e_{\theta} = \frac{1}{a} (u \cdot \cot \varphi + \frac{v_{, \theta}}{\sin \varphi} - w)$$

$$e_{\varphi \theta} = \frac{1}{a} \left(\frac{u_{, \theta}}{\sin \varphi} + v_{, \varphi} \cdot \sin \varphi \right) \rightarrow \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v}{\sin \varphi} \right)$$

$$k_{\varphi} = \frac{1}{a^2} (u_{, \varphi} + w_{, \varphi \varphi})$$

$$k_{\theta} = \frac{1}{a^2} \left[(u + w_{, \varphi}) \cot \varphi + \frac{1}{\sin \varphi} \left(v_{, \theta} + \frac{w_{, \theta}}{\sin \varphi} \right) \right]$$

$$k_{\varphi \theta} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{u_{, \theta} + w_{, \theta \varphi}}{\sin \varphi} + \sin \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v}{\sin \varphi} + \frac{w_{, \theta}}{\sin^2 \varphi} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} (u_{, \theta} - v \cot \varphi) + v_{, \varphi} \right]$$

روابط تنش بر حسب نیرو و گشتاور بر واحد طول

$$\sigma = \sigma_{rr} + 2\sigma_{\alpha\alpha} \rightarrow \int \sigma dz = \int \sigma_{rr} dz + \int 2\sigma_{\alpha\alpha} dz$$

این روابط مانند روابط هکیم بر تیر و ورقه باشند:

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{t} + \frac{12 M_{\alpha\beta} \cdot z}{t^3}$$

و به فرم باز شده:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{N_{\alpha}}{t} + \frac{12 M_{\alpha}}{t^3} z$$

$$\sigma_{\beta} = \frac{N_{\beta}}{t} + \frac{12 M_{\beta}}{t^3} z$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{t} + \frac{12 M_{\alpha\beta}}{t^3} z$$

$$\tau_{\alpha z} = \frac{3 Q_{\alpha}}{2t} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2} \right)$$

$$\tau_{\beta z} = \frac{3 Q_{\beta}}{2t} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2} \right)$$

$$(\sigma_{\alpha\beta})_{max} = \frac{N_{\alpha\beta}}{t} \pm \frac{6 M_{\alpha\beta}}{t^2} \quad (\alpha, \beta \neq z)$$

$$(\tau_{\alpha z})_{max} = \frac{3 Q_{\alpha}}{2t} \quad (\tau_{\beta z})_{max} = \frac{3 Q_{\beta}}{2t}$$

روابط نیرو و گشتاور بر واحد طول بر حسب مؤلفه‌ها کرنشی

با فرض تنجی و کرنشی صفحه از همان (با توجه به فرضیات تئور کلاسیک، این حالت عملاً ایجاد می‌گردد)، از روابط گسترده می‌توانیم
هنک داریم:

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{\alpha} + \nu \epsilon_{\beta}) \\ \sigma_{\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{\beta} + \nu \epsilon_{\alpha}) \\ \tau_{\alpha\beta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{\alpha\beta} \end{cases}$$

درستی، پس از یک رگیر فرضی Love-Timoshenko:

$$\begin{Bmatrix} N_{\alpha} \\ M_{\alpha} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} (\epsilon_{\alpha} + \nu \epsilon_{\beta}) dz$$

$$\begin{Bmatrix} N_{\beta} \\ M_{\beta} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} (\epsilon_{\beta} + \nu \epsilon_{\alpha}) dz$$

$$\begin{Bmatrix} N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} \\ M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \gamma_{\alpha\beta} dz$$

بدین ترتیب، برای روابط (19):

$$\epsilon_{\alpha} = e_{\alpha} - z k_{\alpha}$$

$$\epsilon_{\beta} = e_{\beta} - z k_{\beta}$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} - z k_{\alpha\beta}$$

مرتوانه‌ها:

$$N_{\alpha} = C(e_{\alpha} + \nu e_{\beta})$$

$$N_{\beta} = C(e_{\beta} + \nu e_{\alpha})$$

$$N_{\alpha\beta} = \frac{C}{2}(1-\nu) e_{\alpha\beta}$$

$$M_{\alpha} = -D(k_{\alpha} + \nu k_{\beta})$$

$$M_{\beta} = -D(k_{\beta} + \nu k_{\alpha})$$

$$M_{\alpha\beta} = -\frac{D}{2}(1-\nu) k_{\alpha\beta}$$

در روابط بالا، ضرایب C و D به ترتیب، سختی کششی و سختی خمشی نامیده می‌شوند:

$$C = \frac{Et}{1-\nu^2}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

تنه‌های غشایی

اگر ضخامت پوسته بسیار ناچیز باشد، مقدار گشتاور و قاطع پوسته ناچیز خواهد بود. به ویژه اگر در نواحی گاه‌گاه پوسته نیروی برشی و نیروی محوری یا نقطه‌ای تمرکز داشته باشد، ضخامت پوسته تغییر می‌کند. در این حالت می‌توان از آنالیز گشتاورها و نیروها عرضی هر واحد طول در روابط تعادل حاکم پوسته‌ها نمود. بدین ترتیب، تعادلات تعادل نیرو و موم خواهد بود. درستی، از روابط (6) داریم و برابر حالت استاتیکی:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} (B N_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A N_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{\alpha\beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_\beta + A B \cdot p_\alpha = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (A N_\beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (B N_{\alpha\beta}) - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_\alpha + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{\beta\alpha} + A B \cdot p_\beta = 0 \\ \frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} + p_n = 0 \end{cases}$$

اگر پوسته دارای تقارن دوار باشد (از لحاظ هندسی) آنگاه مشتقات پارامترها
هندسی نسبت به پارامتر β متغیر β صفر خواهد گردید:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} (B N_\alpha) + A \frac{\partial}{\partial \beta} (N_{\beta\alpha}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_\beta + A B \cdot p_\alpha = 0 \\ A \frac{\partial}{\partial \beta} (N_\beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (B N_{\alpha\beta}) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{\beta\alpha} + A B \cdot p_\beta = 0 \\ \frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} + p_n = 0 \end{cases} \quad (20)$$

اگر! رگستر نیز تقارن باشد، آنگاه $N_{\alpha\beta}$ و مشتقات نسبت به β صفر خواهند گردید:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} (B N_\alpha) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_\beta + A B \cdot p_\alpha = 0 \\ \frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} + p_n = 0 \end{cases}$$

در اینجا، رابط دوم از سه رابط قبل به خود در خود بر آورده خواهد شد. و معلوم می گردد که در اینجا:

$$p_\beta = 0$$

است.

$$\alpha = \varphi \quad \beta = \theta \quad R_\alpha = r_1 \quad R_\beta = r_2 \quad A = r_1 \quad B = r_2 \quad \frac{\partial B}{\partial \alpha} = r_1 \sin \varphi$$

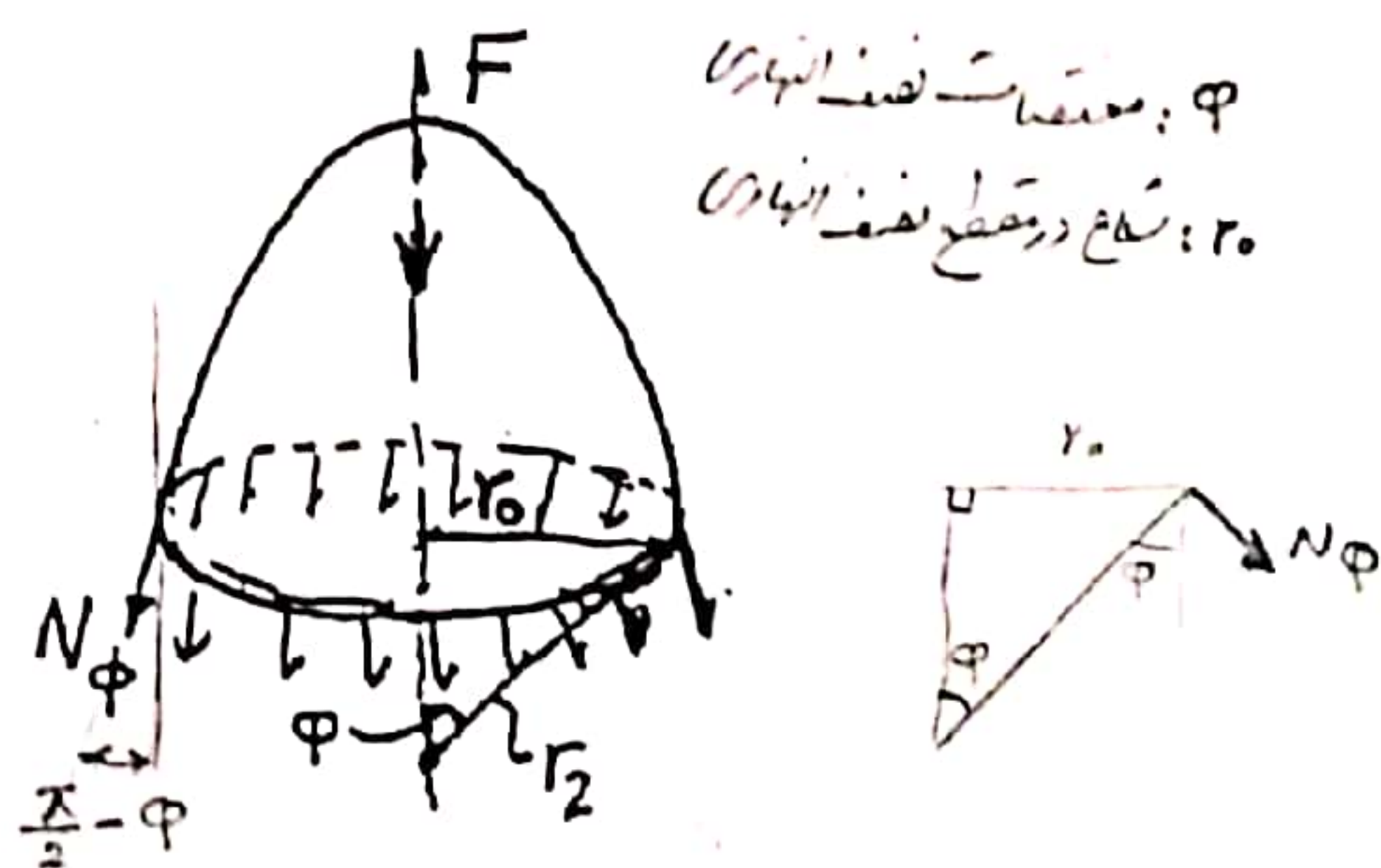
باشد (قبل از بر لایحه سته دوار تقارن دوار بدست آمده بودند):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi r_2) - N_\theta r_1 \sin \varphi + p_\varphi r_1 r_2 = 0 \\ \frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} + p_z = 0 \end{cases}$$

رابط اول را می توان توسط رابط ساده تر جایگزین نمود. در هر حال دو رابط میان N_φ و N_θ کافیست.

اگر بر آید نیروها وارده بر سطح سته در جهت قائم آن قطعی که زاویه φ دارد را با $F \sin \varphi$ می دهیم، از تعادل این نیروها در جهت قائم داریم:

$$N_\varphi = - \frac{F}{(2\pi r_0) \sin \varphi}$$



فرم معادلات (20) بدین ترتیب به با توجه به هم (از $\varphi = \alpha$ و ...) در بار گذر نامتقارن:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_\varphi) + r_1 N_{\varphi\theta} - r_1 N_\theta \sin \varphi + r_0 r_1 p_\varphi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (r_0 N_\varphi) + r_1 N_{\theta\varphi} + r_1 N_{\varphi\theta} \sin \varphi + r_0 r_1 p_\theta = 0 \\ \frac{N_\varphi}{r_1} + \frac{N_\theta}{r_2} + p_z = 0 \end{cases}$$

فرم رابط (20) به صورت
 φ, θ پارامترها
مشتقات

رابطه مربوط به کرنش‌ها در دو پوسته مخروطی مرکبی

مسعود حسن پور (دکتری) ۹۷۱۱۵۷۴۰۰۲ تمرین درس تئوری ورق و پوسته

معادلات تعادل برای پوسته:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AN_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A}{\partial \beta}N_{\alpha\beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}N_{\beta} - \frac{AB}{R_{\alpha}}Q_{\alpha} + ABP_{\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(AN_{\beta}) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_{\alpha\beta}) + \frac{\partial B}{\partial \alpha}N_{\beta\alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta}N_{\alpha} - \frac{AB}{R_{\beta}}Q_{\beta} + ABP_{\beta} = 0$$

$$\frac{AB}{R_{\alpha}}N_{\alpha} + \frac{AB}{R_{\beta}}N_{\beta} + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BQ_{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AQ_{\beta}) + ABP_n = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AM_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A}{\partial \beta}M_{\alpha\beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}M_{\beta} - ABQ_{\alpha} + ABm_{\beta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(AM_{\beta}) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_{\alpha\beta}) + \frac{\partial B}{\partial \alpha}M_{\beta\alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta}M_{\alpha} - ABQ_{\beta} + ABm_{\alpha} = 0$$

معادلات کرنش لایه میانی برای پوسته:

$$e_{\alpha} = \frac{u_{,\alpha}}{A} + \frac{v}{AB}A_{,\beta} - \frac{w}{R_{\alpha}}$$

$$e_{\beta} = \frac{v_{,\beta}}{B} + \frac{u}{AB}B_{,\alpha} - \frac{w}{R_{\beta}}$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right)$$

معادلات شعاع انحناء برای پوسته:

$$k_{\alpha} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{u}{R_{\alpha}} + \frac{w_{,\alpha}}{A} \right] + \frac{A_{,\beta}}{AB} \left[\frac{v}{R_{\beta}} + \frac{w_{,\beta}}{B} \right]$$

$$k_{\beta} = \frac{B_{,\alpha}}{AB} \left[\frac{u}{R_{\alpha}} + \frac{w_{,\alpha}}{A} \right] + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{v}{R_{\beta}} + \frac{w_{,\beta}}{B} \right]$$

$$k_{\alpha\beta} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{u}{AR_{\alpha}} + \frac{w_{,\alpha}}{A^2} \right] + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{v}{BR_{\beta}} + \frac{w_{,\beta}}{B^2} \right] + \frac{1}{R_{\alpha}} \left(\frac{u_{,\beta}}{B} - \frac{v}{AB}B_{,\alpha} \right) + \frac{1}{R_{\beta}} \left(\frac{v_{,\alpha}}{A} - \frac{u}{AB}A_{,\beta} \right)$$

پیوسته استوانه ای:

$$\varphi = \alpha = x \quad A = 1 \quad R_\alpha = \infty \quad \frac{\partial B}{\partial \alpha} = \frac{\partial B}{\partial \beta} = 0$$

$$\beta = \theta \quad B = a \quad R_\beta = a \quad \frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial A}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(aN_x) + \frac{\partial}{\partial \theta}(N_{\theta x}) + (0)N_{x\theta} - (0)N_\theta - \frac{a}{\infty}Q_x + aP_x = 0 \longrightarrow$$

$$aN_{x,x} + N_{\theta x,\theta} + aP_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(N_\theta) + \frac{\partial}{\partial x}(aN_{x\theta}) + (0)N_{\theta x} - (0)N_x - \frac{a}{a}Q_\theta + aP_\theta = 0 \longrightarrow$$

$$N_{\theta,\theta} + aN_{x\theta,x} - Q_\theta + aP_\theta = 0$$

$$\frac{a}{\infty}N_x + \frac{a}{a}N_\theta + \frac{\partial}{\partial x}(aQ_x) + \frac{\partial}{\partial \theta}(Q_\theta) + aP_n = 0 \longrightarrow$$

$$N_\theta + aQ_{x,x} + Q_{\theta,\theta} + aP_n = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(aM_x) + \frac{\partial}{\partial \theta}(M_{\theta x}) + (0)M_{x\theta} - (0)M_\theta - aQ_x + am_\theta = 0 \longrightarrow$$

$$aM_{x,x} + M_{\theta x,\theta} - aQ_x + am_\theta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(M_\theta) + \frac{\partial}{\partial x}(aM_{x\theta}) + (0)M_{\theta x} - (0)M_x - aQ_\theta + am_x = 0 \longrightarrow$$

$$M_{\theta,\theta} + aM_{x\theta,x} - aQ_\theta + am_x = 0$$

$$e_x = \frac{u_{,x}}{1} + \frac{v}{a}(0) - \frac{w}{\infty} \longrightarrow \boxed{e_x = u_{,x}}$$

$$e_\theta = \frac{v_{,\theta}}{a} + \frac{u}{a}(0) - \frac{w}{a} \longrightarrow \boxed{e_\theta = \frac{1}{a}v_{,\theta} - \frac{w}{a}}$$

$$e_{x\theta} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{1} \right) + \frac{a}{1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{a} \right) \longrightarrow \boxed{e_{x\theta} = \frac{1}{a}u_{,\theta} + v_{,x}}$$

$$k_x = \frac{1}{1} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u}{\infty} + \frac{w_{,x}}{1} \right] + \frac{0}{a} \left[\frac{v}{a} + \frac{w_{,\theta}}{a} \right] \longrightarrow \boxed{k_x = w_{,xx}}$$

$$k_\theta = \frac{0}{a} \left[\frac{u}{\infty} + \frac{w_{,x}}{1} \right] + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{v}{a} + \frac{w_{,\theta}}{a} \right] \longrightarrow \boxed{k_\theta = \frac{1}{a^2} [v_{,\theta} + w_{,\theta\theta}]}$$

$$k_{x\theta} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{u}{\infty} + \frac{w_{,x}}{1} \right] + \frac{a}{1} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{v}{a \cdot a} + \frac{w_{,\theta}}{a^2} \right] + \frac{1}{\infty} \left(\frac{u_{,\theta}}{a} - \frac{v}{a}(0) \right) + \frac{1}{a} \left(\frac{v_{,x}}{1} - \frac{u}{a}(0) \right) \longrightarrow$$

$$k_{x\theta} = \frac{1}{a} w_{,x\theta} + \frac{1}{a} v_{,x} + \frac{1}{a} w_{,\theta x} + \frac{1}{a} v_{,x} \longrightarrow \boxed{k_{x\theta} = \frac{2}{a} (v_{,x} + w_{,x\theta})}$$

پوسته مخروطی:

$$\varphi = \alpha = x \quad A = 1 \quad R_\alpha = \infty \quad \frac{\partial B}{\partial \alpha} = \sin \alpha \quad \frac{\partial B}{\partial \beta} = 0$$

$$\beta = \theta \quad B = x \sin \alpha \quad R_\beta = x \tan \alpha \quad \frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial A}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (x \sin \alpha N_x) + \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{\theta x}) + (0) N_{x\theta} - (\sin \alpha) N_\theta - \frac{x \sin \alpha}{\infty} Q_x + x \sin \alpha P_x = 0 \longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} (x N_x) \sin \alpha + N_{\theta x, \theta} - N_\theta \sin \alpha + x \sin \alpha P_x = 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(N_\theta) + \frac{\partial}{\partial x}(x \sin \alpha N_{x\theta}) + (\sin \alpha) N_{\theta x} - (0) N_x - \frac{x \sin \alpha}{x \tan \alpha} Q_\theta + x \sin \alpha P_\theta = 0 \longrightarrow$$

$$N_{\theta,\theta} + \frac{\partial}{\partial x}(x N_{x\theta}) \sin \alpha + N_{\theta x} \sin \alpha - Q_\theta \cos \alpha + x \sin \alpha P_\theta = 0$$

$$\frac{x \sin \alpha}{\infty} N_x + \frac{x \sin \alpha}{x \tan \alpha} N_\theta + \frac{\partial}{\partial x}(x \sin \alpha Q_x) + \frac{\partial}{\partial \theta}(Q_\theta) + x \sin \alpha P_n = 0 \longrightarrow$$

$$N_\theta \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial x}(x Q_x) \sin \alpha + Q_{\theta,\theta} + x \sin \alpha P_n = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x \sin \alpha M_x) + \frac{\partial}{\partial \theta}(M_{\theta x}) + (0) M_{x\theta} - (\sin \alpha) M_\theta - x \sin \alpha Q_x + x \sin \alpha m_\theta = 0 \longrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x M_x) \sin \alpha + M_{\theta x,\theta} - M_\theta \sin \alpha - x \sin \alpha Q_x + x \sin \alpha m_\theta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(M_\theta) + \frac{\partial}{\partial x}(x \sin \alpha M_{x\theta}) + (\sin \alpha) M_{\theta x} - (0) M_x - x \sin \alpha Q_\theta + x \sin \alpha m_x = 0 \longrightarrow$$

$$M_{\theta,\theta} + \frac{\partial}{\partial x}(x M_{x\theta}) \sin \alpha + M_{\theta x} \sin \alpha - x \sin \alpha Q_\theta + x \sin \alpha m_x = 0$$

$$e_x = \frac{u_{,x}}{1} + \frac{v}{x \sin \alpha} (0) - \frac{w}{\infty} \longrightarrow e_x = u_{,x}$$

$$e_\theta = \frac{v_{,\theta}}{x \sin \alpha} + \frac{u}{x \sin \alpha} (\sin \alpha) - \frac{w}{x \tan \alpha} \longrightarrow e_\theta = \frac{u}{x} + \frac{v_{,\theta}}{x \sin \alpha} - \frac{w}{x \tan \alpha}$$

$$e_{x\theta} = \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{1} \right) + \frac{x \sin \alpha}{1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{x \sin \alpha} \right) \longrightarrow e_{x\theta} = \frac{u_{,\theta}}{x \sin \alpha} + x \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{x \sin \alpha} \right)$$

$$k_x = \frac{1}{1} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u}{\infty} + \frac{w_{,x}}{1} \right] + \frac{0}{x \sin \alpha} \left[\frac{v}{x \tan \alpha} + \frac{w_{,\theta}}{x \sin \alpha} \right] \longrightarrow \boxed{k_x = w_{,xx}}$$

$$k_\theta = \frac{\sin \alpha}{x \sin \alpha} \left[\frac{u}{\infty} + \frac{w_{,x}}{1} \right] + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{v}{x \tan \alpha} + \frac{w_{,\theta}}{x \sin \alpha} \right] \longrightarrow \boxed{k_\theta = \frac{w_{,x}}{x} + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{v}{x \tan \alpha} + \frac{w_{,\theta}}{x \sin \alpha} \right]}$$

$$k_{x\theta} = \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{u}{\infty} + \frac{w_{,x}}{1} \right] + \frac{x \sin \alpha}{1} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{v}{(x \sin \alpha)(x \tan \alpha)} + \frac{w_{,\theta}}{(x \sin \alpha)^2} \right] \\ + \frac{1}{\infty} \left(\frac{u_{,\theta}}{x \sin \alpha} - \frac{v}{x \sin \alpha} \sin \alpha \right) + \frac{1}{x \tan \alpha} \left(\frac{v_{,x}}{1} - \frac{u}{x \sin \alpha} (0) \right) \longrightarrow$$

$$\boxed{k_{x\theta} = \frac{w_{,x\theta}}{x \sin \alpha} + x \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{v}{x^2 \tan \alpha} + \frac{w_{,\theta}}{x^2 \sin \alpha} \right] + \frac{v_{,x}}{x \tan \alpha}}$$

پوسته کروی:

$$\alpha = \varphi \quad A = a \quad R_\alpha = a \quad \frac{\partial B}{\partial \alpha} = a \cos \varphi \quad \frac{\partial B}{\partial \beta} = 0$$

$$\beta = \theta \quad B = a \sin \varphi \quad R_\beta = a \quad \frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial A}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (a \sin \varphi N_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (a N_{\theta\varphi}) + (0) N_{\varphi\theta} - a \cos \varphi N_\theta - \frac{a \cdot a \sin \varphi}{a} Q_\varphi + a \cdot a \sin \varphi P_\varphi = 0 \xrightarrow{/a}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi \sin \varphi) + N_{\theta\varphi,\theta} - N_\theta \cos \varphi - Q_\varphi \sin \varphi + a \sin \varphi P_\varphi = 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (a N_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (a \sin \varphi N_{\varphi\theta}) + a \cos \varphi N_{\theta\varphi} - (0) N_\varphi - \frac{a \cdot a \sin \varphi}{a} Q_\theta + a \cdot a \sin \varphi P_\theta = 0 \xrightarrow{/a}$$

$$\boxed{N_{\theta,\theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\varphi\theta} \sin \varphi) + N_{\theta\varphi} \cos \varphi - Q_\theta \sin \varphi + a \sin \varphi P_\theta = 0}$$

$$\frac{a \cdot a \sin \varphi}{a} N_{\varphi} + \frac{a \cdot a \sin \varphi}{a} N_{\theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (a \sin \varphi Q_{\varphi}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (a Q_{\theta}) + a \cdot a \sin \varphi P_n = 0 \quad \xrightarrow{/a}$$

$$\boxed{N_{\varphi} \sin \varphi + N_{\theta} \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} (Q_{\varphi} \sin \varphi) + Q_{\theta, \theta} + a \sin \varphi P_n = 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (a \sin \varphi M_{\varphi}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (a M_{\theta \varphi}) + (0) M_{\varphi \theta} - a \cos \varphi M_{\theta} - a \cdot a \sin \varphi Q_{\varphi} + a \cdot a \sin \varphi m_{\theta} = 0 \quad \xrightarrow{/a}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \varphi} (M_{\varphi} \sin \varphi) + M_{\theta \varphi, \theta} - M_{\theta} \cos \varphi - a \sin \varphi Q_{\varphi} + a \sin \varphi m_{\theta} = 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (a M_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (a \sin \varphi M_{\varphi \theta}) + a \cos \varphi M_{\theta \varphi} - (0) M_{\varphi} - a \cdot a \sin \varphi Q_{\theta} + a \cdot a \sin \varphi m_{\varphi} = 0 \quad \xrightarrow{/a}$$

$$\boxed{M_{\theta, \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (M_{\varphi \theta} \sin \varphi) + M_{\theta \varphi} \cos \varphi - a \sin \varphi Q_{\theta} + a \sin \varphi m_{\varphi} = 0}$$

$$e_{\varphi} = \frac{u_{, \varphi}}{a} + \frac{v}{a \cdot a \sin \varphi} (0) - \frac{w}{a} \quad \longrightarrow \quad \boxed{e_{\varphi} = \frac{1}{a} u_{, \varphi} - \frac{w}{a}}$$

$$e_{\theta} = \frac{v_{, \theta}}{a \sin \varphi} + \frac{u}{a \cdot a \sin \varphi} (a \cos \varphi) - \frac{w}{a} \quad \longrightarrow \quad \boxed{e_{\theta} = \frac{v_{, \theta}}{a \sin \varphi} + \frac{u}{a} (\cot \varphi) - \frac{w}{a}}$$

$$e_{\varphi \theta} = \frac{a}{a \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{a} \right) + \frac{a \sin \varphi}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v}{a \sin \varphi} \right) \quad \longrightarrow \quad \boxed{e_{\varphi \theta} = \frac{u_{, \theta}}{a \sin \varphi} + \frac{\sin \varphi}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v}{\sin \varphi} \right)}$$

$$k_{\varphi} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{u}{a} + \frac{w_{, \varphi}}{a} \right] + \frac{0}{a \cdot a \sin \varphi} \left[\frac{v}{a} + \frac{w_{, \theta}}{a \sin \varphi} \right] \quad \longrightarrow \quad \boxed{k_{\varphi} = \frac{1}{a^2} (u_{, \varphi} + w_{, \varphi \varphi})}$$

$$k_{\theta} = \frac{a \cos \varphi}{a \cdot a \sin \varphi} \left[\frac{u}{a} + \frac{w_{, \varphi}}{a} \right] + \frac{1}{a \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{v}{a} + \frac{w_{, \theta}}{a \sin \varphi} \right] \quad \longrightarrow \quad \boxed{k_{\theta} = \frac{\cot \varphi}{a^2} (u + w_{, \varphi}) + \frac{1}{a^2 \sin \varphi} \left[v_{, \theta} + \frac{w_{, \theta \theta}}{\sin \varphi} \right]}$$

$$k_{\varphi \theta} = \frac{a}{a \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{u}{a \cdot a} + \frac{w_{, \varphi}}{a^2} \right] + \frac{a \sin \varphi}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{v}{a \sin \varphi \cdot a} + \frac{w_{, \theta}}{(a \sin \varphi)^2} \right] + \frac{1}{a} \left(\frac{u_{, \theta}}{a \sin \varphi} - \frac{v}{a \cdot a \sin \varphi} (a \cos \varphi) \right) + \frac{1}{a} \left(\frac{v_{, \varphi}}{a} - \frac{u}{a \cdot a \sin \varphi} (0) \right)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{k_{\varphi \theta} = \frac{1}{a^2 \sin \varphi} (u_{, \theta} + w_{, \varphi \theta}) + \frac{\sin \varphi}{a^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{v}{\sin \varphi} + \frac{w_{, \theta}}{\sin^2 \varphi} \right] + \frac{1}{a^2 \sin \varphi} (u_{, \theta} - v \cos \varphi) + \frac{v_{, \varphi}}{a^2}}$$