Mechanics of Composite Materials

Document Type: *Take-Home Exam October 2020*

Semnan university

۱- عبارت زیر را با بسط اندیس‌های آن (به ترتیب) در ضرب دو تابع کرونیکر، گسترش داده و سپس بصورت عددی، ساده کنید.

$$\delta_{ij}\delta_{ij} = ?$$

۲- (الف) معادلات تعادل را بصورت اندیسی و کامل نوشته و برای یک سازه با میدان تنش و بردار نیروهای درونی زیر را بررسی نمایید.

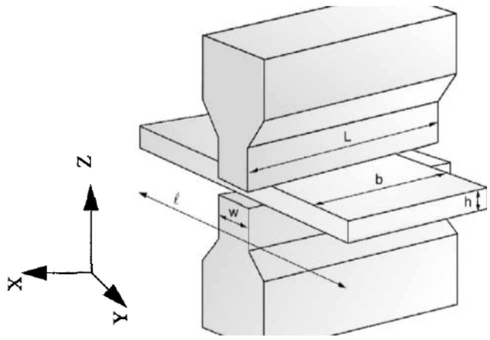
$$\text{Body forces: } (-4x, -3y, -3z-1)$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} x^2+y^2 & xy & xz \\ xy & y^2+z^2 & y+1 \\ xz & y+1 & x^2+z^2 \end{bmatrix}$$

(ب) سپس و در ادامه، مولفه‌های تانسور تنش در نقطه زیر و مولفه‌های ترکشن در صفحه زیر را محاسبه کنید.

Point (0,1,2) and Plane (2,3,1)

۳- (الف) برای سازه ورقی شکل زیر که بین دو فک ثابت قرار گرفته است، نوع مسئله (کرنش صفحه‌ای یا تنش صفحه‌ای) را مشخص کنید. مولفه‌های تنش یا کرنش صفر را مشخص کنید. سپس، معادلات تعادل را برای حالت نیروهای درونی صفر، ساده‌سازی کنید.



(ب) در صورتی که مولفه جابجایی سوم (w) بصورت زیر باشد، مقدار ثابت (A) و سایر مولفه‌های جابجایی (u, v) را بدست آورید. برای این منظور، شرایط مرزی زیر را نیز اعمال کنید. سپس و در ادامه، مولفه‌های کرنش را محاسبه کنید.

Displacement component in z-direction: $w = x^2 + y^2 + xy + Az^2$, A : constant

$$u = 1 \quad , \quad v = 0 \quad at \quad x = y = z = 0$$

Mechanics of Composite Materials

Document Type: *Take-Home Exam October 2020*

Semnan university

Answers:

#1.

$$\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{1j}\delta_{1j} + \delta_{2j}\delta_{2j} + \delta_{3j}\delta_{3j} =$$

$$\delta_{11}\delta_{11} + \delta_{21}\delta_{21} + \delta_{31}\delta_{31} + \delta_{12}\delta_{12} + \delta_{22}\delta_{22} + \delta_{32}\delta_{32} + \delta_{13}\delta_{13} + \delta_{23}\delta_{23} + \delta_{33}\delta_{33} =$$

$$= 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 = 3$$

#2.

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \rightarrow 2x + x + x - 4x = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \rightarrow y + 2y + 0 - 3y = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \rightarrow z + 1 + 2z - 3z - 1 = 0$$

$$point: (0,1,2) \rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & xy & xz \\ xy & y^2 + z^2 & y + 1 \\ xz & y + 1 & x^2 + z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T_i = \sigma_{ji} n_j$$

$$plane: (2,3,1) \rightarrow T_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z = 2 + 0 + 0 = 2$$

$$plane: (2,3,1) \rightarrow T_y = \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z = 0 + 15 + 2 = 17$$

$$plane: (2,3,1) \rightarrow T_z = \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z = 0 + 6 + 4 = 10$$

#3.

Plane strain

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$$

$$\tau = G\gamma \rightarrow \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \rightarrow \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \rightarrow \sigma_{zz} = f(x,y)$$

$$w = x^2 + y^2 + xy + Az^2$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \rightarrow w = f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + Az^2 \rightarrow A = 0$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = -2y - x \rightarrow v = -2yz - xz + C_1(x,y)$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = -2x - y \rightarrow u = -2xz - yz + C_2(x,y)$$

$$u = 1 \ , \ v = 0 \quad at \quad x = y = z = 0 \rightarrow C_1 = 0 \ , \ C_2 = -1$$

$$\rightarrow v = -2yz - xz \ , \ u = -2xz - yz - 1$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -2z \ , \ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2z \ , \ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(-z - z) = -z$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(-2y - x + 2y + x) = 0$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}(2x + y - 2x - y) = 0$$