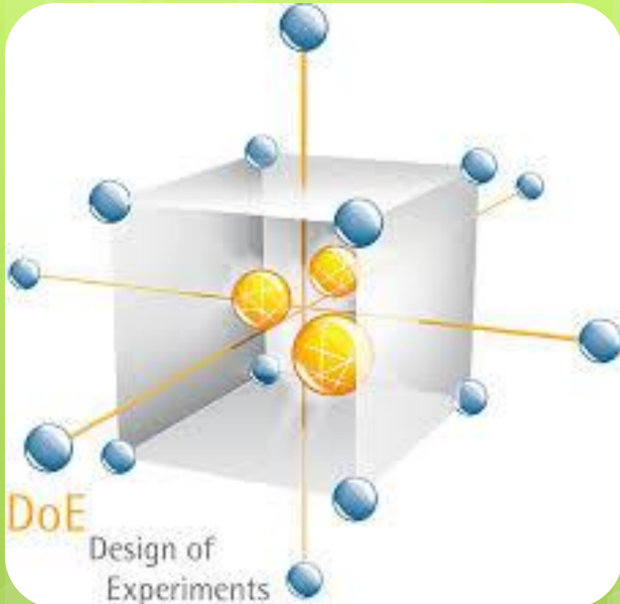
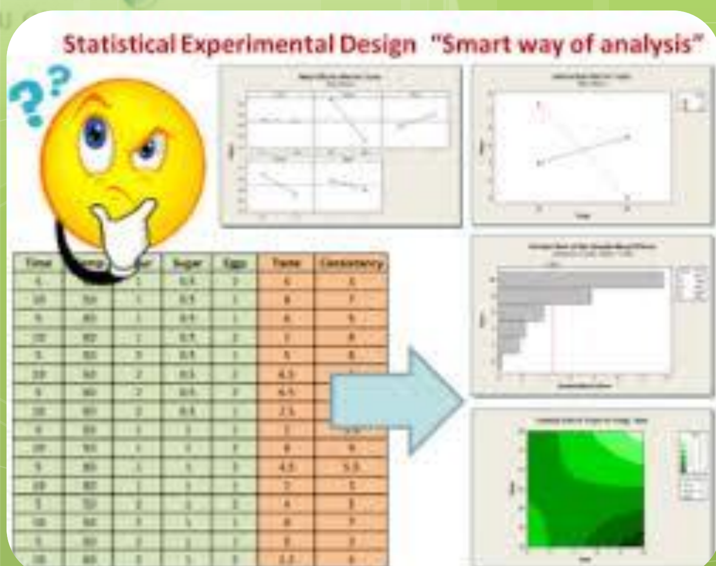




دانشگاه سمنان

طراحی آزمایش ها

ارائه کننده: محمد آزادی

عضو هیئت علمی دانشکده مهندسی مکانیک

فهرست

- پیشگفتار
- طراحی آزمایش و بهینه سازی
  - روش فاکتوریل (تک عاملی)
    - تحلیل واریانس
    - تحلیل مدل اثرهای تثبیت شده
    - تجزیه کل مجموع مربعات
    - تحلیل آماری
  - روش فاکتوریل (چند عاملی)
    - طرح عاملی با ۲ عامل
    - طرح عاملی 2^k
  - تحلیل رگرسیون
    - رگرسیون خطی ساده
    - رگرسیون خطی چندگانه
  - روش رویه پاسخ
    - طرح برازش مدل مرتبه دوم
    - روش تندترین صعود

فهرست

پیشگفتار

طراحی آزمایش و بهینه سازی

روش فاکتوریل (تک عاملی)

تحلیل واریانس

تحلیل مدل اثرهای تثبیت شده

تجزیه کل مجموع مربعات

تحلیل آماری

روش فاکتوریل (چند عاملی)

طرح عاملی با ۲ عامل

طرح عاملی 2^k

تحلیل رگرسیون

رگرسیون خطی ساده

رگرسیون خطی چندگانه

روش رویه پاسخ

طرح برازش مدل مرتبه دوم

روش تندترین صعود

پیشگفتار

در این ارائه، ابتدا مقدماتی بر طراحی آزمایش ها و تئوری های مربوطه آورده شده است. در ادامه نیز، با استفاده از یک نرم افزار تخصصی در زمینه طراحی آزمایش ها، مثالی عملی ارائه خواهد شد.

کاربرد طراحی آزمایش ها

- تحلیل داده های موجود (تجربی و عددی)
- بررسی اثر پارامترهای ورودی مختلف بر خروجی های یک مسئله
  - میزان تاثیر هر یک از ورودی ها بر خروجی ها
  - موثر بودن یا موثر نبودن ورودی ها
  - بهینه سازی مقادیر ورودی بر اساس کمینه و بیشینه خروجی ها
- طراحی آزمون برای کاهش هزینه و زمان

فهرست

- پیشگفتار
- طراحی آزمایش و بهینه سازی
  - روش فاکتوریل (تک عاملی)
    - تحلیل واریانس
    - تحلیل مدل اثرهای تثبیت شده
    - تجزیه کل مجموع مربعات
    - تحلیل آماری
  - روش فاکتوریل (چند عاملی)
    - طرح عاملی با ۲ عامل
    - طرح عاملی 2^k
  - تحلیل رگرسیون
    - رگرسیون خطی ساده
    - رگرسیون خطی چندگانه
  - روش رویه پاسخ
    - طرح برازش مدل مرتبه دوم
    - روش تندترین صعود

واژه طراحی آزمون:

- Design of Experiments (DOE)

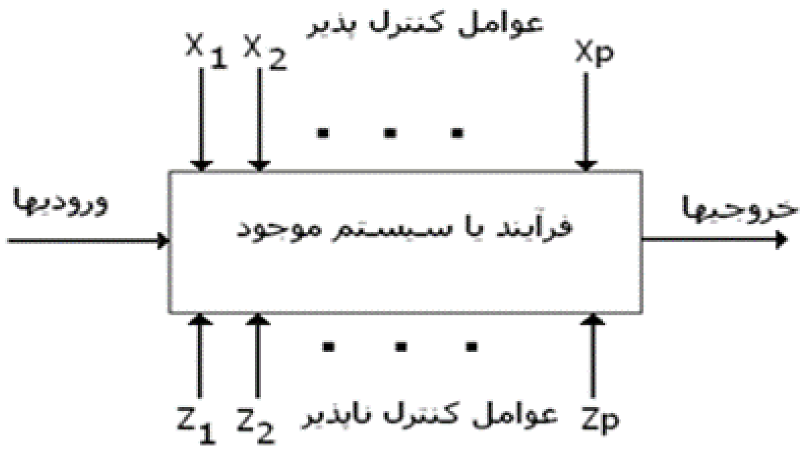
تعریف آزمون:

در تمامی زمینه های واقعی تحقیق، معمولا آزمایش هایی به‌وسیله پژوهشگران برای کشف موضوعی درباره فرآیند یا سیستمی خاص انجام می شود. به معنای واقعی کلمه، آزمایش یک آزمون یا داده است. آزمایش طرح شده، یک آزمون یا دنباله ای از آزمون هاست که درآن ها تغییرات مورد نظر، در متغیرهای ورودی فرآیند یا سیستم اعمال می شوند، به قسمی که می توان علل تغییرات در پاسخ خروجی را مشاهده و مشخص نمود.

ورودی ها و خروجی ها:

معمولا می توان فرآیند را به‌صورت ترکیبی از ماشین ها، روش ها، اشخاص و منابع دیگری تصور کرد که بعضی از ورودی ها را تبدیل به خروجی هایی می کنند که یک یا چند پاسخ قابل مشاهده دارند. بعضی از متغیرها در یک فرآیند، کنترل پذیر و برخی کنترل ناپذیرند.

فرآیند یا سیستم تحت مطالعه را می توان به وسیله مدل زیر معرفی کرد.



طراحی آزمایش و بهینه سازی

اهداف آزمون:

- تعیین متغیرهایی که بیشترین تأثیر را در پاسخ دارند.
- تعیین موقعیت متغیرهای مؤثر به‌طوری که تقریبا پاسخ، همیشه نزدیک مقدار اسمی مطلوب باشد.
- تعیین موقعیت متغیرهای مؤثر به‌طوری که تغییرپذیری پاسخ کوچک باشد.
- تعیین موقعیت متغیرهای مؤثر به‌طوری که اثرهای متغیرهای کنترل ناپذیر کمینه شوند.

نتایج کاربردی:

- نتایج فرآیند را اصلاح کند.
- تغییرپذیری را کاهش داده و مطابقت آن را با نیازهای هدف یا اسمی نزدیکتر کند.
- زمان گسترش را کاهش دهد.
- کل هزینه را کاهش دهد.

سه اصل پایه ای طراحی آزمایش

- **تکرار**

دو خاصیت مهم تکرار عبارتند از (۱) اینکه محقق را قادر می سازد که برآوردی برای خطای آزمایشی به‌دست آورد و (۲) اینکه اگر از میانگین نمونه برای برآورد اثر عاملی در آزمایش استفاده شده باشد، آنگاه تکرار، محقق را قادر می سازد که برآوردی دقیق‌تر از این اثر، به‌دست آورد.

- **تصادفی بودن**

در استفاده از روش های آماری در طراحی آزمایش‌ها، تصادفی کردن، مسئله ای بنیادی است. منظور از تصادفی کردن آن است که تخصیص ابزار آزمایش و ترتیبی که با آن، اجراهای فردی یا امتحان های آزمایش انجام می شوند، به تصادف تعیین شده باشند. در روش های آماری لازم است که مشاهدات (و یا خطاها) متغیرهای تصادفی باشند که به‌صورت مستقل توزیع شده اند.

- **بلوک بندی**

بلوک بندی، تکنیکی است که برای افزایش دقت آزمایش از آن استفاده می شود. بلوک قسمتی از ابزار آزمایش است که باید متجانس تر از کل مجموعه ابزار باشد. بلوک بندی متضمن انجام مقایسه میان شرایط مورد نظر آزمایش درون هر بلوک است.

طراحی آزمایش و بهینه سازی

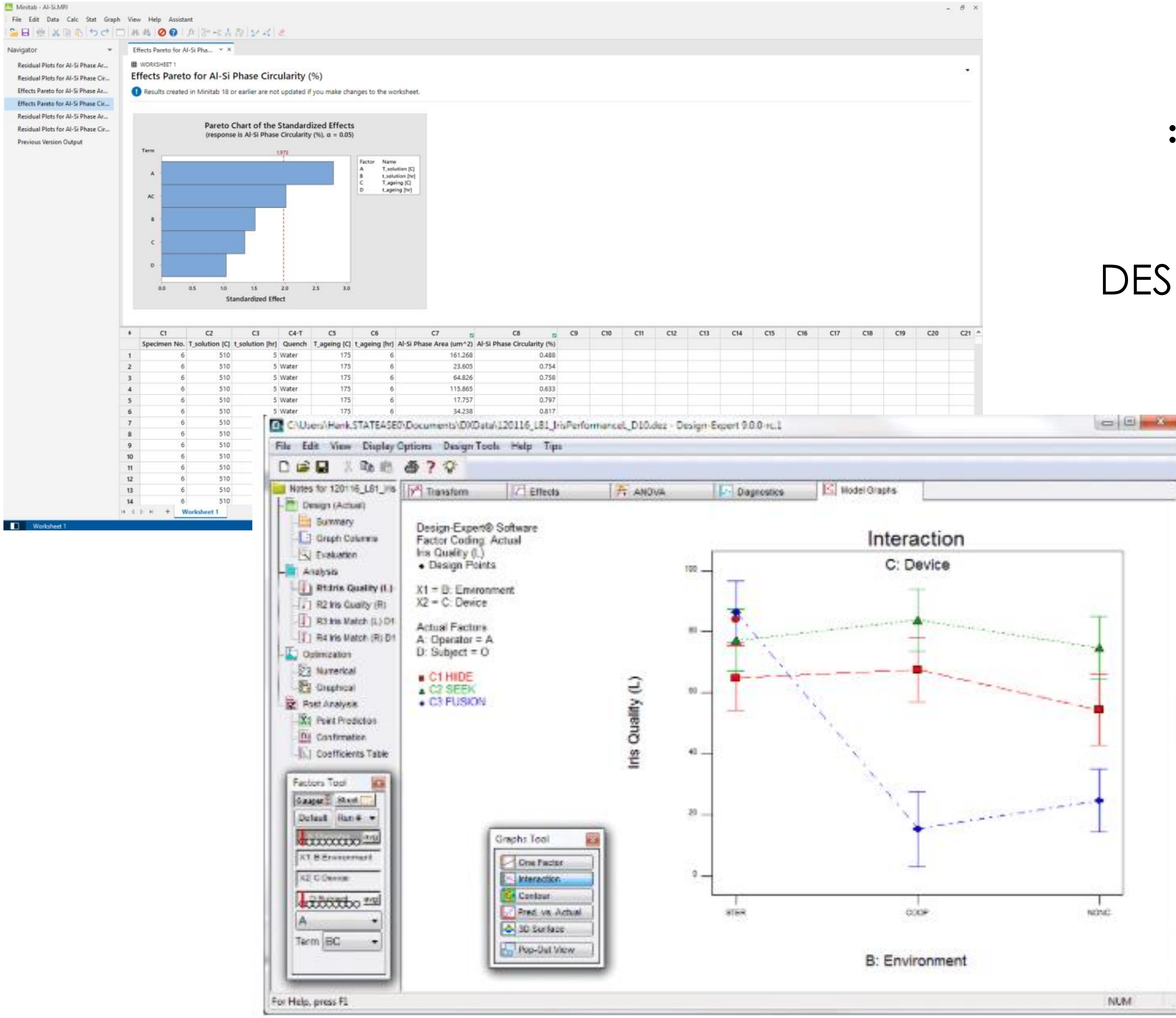
مراحل طراحی آزمایش و بهینه سازی:

- شناسایی و بیان مسئله
- انتخاب عوامل و سطوح
- انتخاب متغیر پاسخ
- انتخاب طراحی آزمایش
- انجام آزمایش
- تحلیل داده ها
- نتیجه گیری ها و توصیه ها (بهینه سازی)

طراحی آزمایش و بهینه سازی

نرم افزارهای مرتبط:

- MINITAB
- DESIGN-EXPERT
- SPSS
- ...



فهرست

- پیشگفتار
- طراحی آزمایش و بهینه سازی
  - روش فاکتوریل (تک عاملی)
    - تحلیل واریانس
    - تحلیل مدل اثرهای تثبیت شده
    - تجزیه کل مجموع مربعات
    - تحلیل آماری
  - روش فاکتوریل (چند عاملی)
    - طرح عاملی با ۲ عامل
    - طرح عاملی 2^k
  - تحلیل رگرسیون
    - رگرسیون خطی ساده
    - رگرسیون خطی چندگانه
  - روش رویه پاسخ
    - طرح برازش مدل مرتبه دوم
    - روش تندترین صعود

روش فاکتوریل

تحلیل واریانس:

اگر از یک عامل، a تیمار یا a سطح متفاوت وجود داشته که قرار باشد آن ها با هم مقایسه شوند، پاسخ مشاهده شده از هر یک از a تیمار، یک متغیر تصادفی است. به‌طور مثال، y_{ij}، j امین مشاهده را تحت i امین تیمار، نشان می دهد. به‌طور کلی تحت i امین تیمار n مشاهده وجود دارد.

داده ها به صورت زیر نمایش داده می شوند:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad : \quad i = 1,2,\dots,a \quad j = 1,2,\dots,n$$

y_{ij} مقدار ij امین مشاهده

μ پارامتر مشترک برای تمام تیمارها به نام میانگین کل

$\boldsymbol{\tau}_i$ پارامتر ویژه i امین تیمار (انحراف از میانگین)

ε_{ij} مولفه های خطای تصادفی

روش فاکتوریل

تحلیل واریانس داده های یک آزمایش تک عاملی

تیمار (سطح)	مشاهدات				کل	متوسط
1	y_{11}	y_{12}	$\dots$	y_{1n}	y_1	$\bar{y}_1$
2	y_{21}	y_{22}	$\dots$	y_{2n}	y_2	$\bar{y}_2$
. . .	. . .	. . .	$\dots$	. . .	. . .	. . .
a	y_{a1}	y_{a2}	$\dots$	y_{an}	y_a	$\bar{y}_a$
					$y_{..}$	$\bar{y}_{..}$

فهرست

پیشگفتار

طراحی آزمایش و بهینه سازی

روش فاکتوریل (تک عاملی)

تحلیل واریانس

تحلیل مدل اثرهای تثبیت شده

تجزیه کل مجموع مربعات

تحلیل آماری

روش فاکتوریل (چند عاملی)

طرح عاملی با ۲ عامل

طرح عاملی 2^k

تحلیل رگرسیون

رگرسیون خطی ساده

رگرسیون خطی چندگانه

روش رویه پاسخ

طرح برازش مدل مرتبه دوم

روش تندترین صعود

روش فاکتوریل

تحلیل مدل اثرهای تثبیت شده:

در مدل اثرهای تثبیت شده، اثرهای تیماری، τ_i معمولا به‌صورت انحراف از میانگین کل تعریف می شوند.

$$\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$$

اگر y_i که مجموع مشاهدات تحت i امین تیمار و $\bar{y}_i$ متوسط مشاهدات تحت i امین تیمار باشد. به تشابه فرض شود که $y_{..}$ مجموع تمام مشاهدات و $\bar{y}_{..}$ میانگین کل مشاهدات باشد، آنگاه:

$$y_{i.} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \quad , \quad \bar{y}_{i.} = \frac{y_{i.}}{n} \qquad i = 1, 2, \ldots, a$$

$$y_{..} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \quad , \quad \bar{y}_{..} = \frac{y_{..}}{N}$$

در معادله بالا N=an تعداد کل مشاهدات است. ملاحظه میگردد که نماد نقطه در زیرنویس دلالت بر مجموع یابی نسبت به زیرنویسی می کند که نقطه بجای آن نشسته است

فهرست

پیشگفتار
طراحی آزمایش و بهینه سازی
روش فاکتوریل (تک عاملی)
تحلیل واریانس
تحلیل مدل اثرهای تثبیت شده
تجزیه کل مجموع مربعات
تحلیل آماری
روش فاکتوریل (چند عاملی)
طرح عاملی با ۲ عامل
طرح عاملی 2^k
تحلیل رگرسیون
رگرسیون خطی ساده
رگرسیون خطی چندگانه
روش رویه پاسخ
طرح برازش مدل مرتبه دوم
روش تندترین صعود

روش فاکتوریل

تجزیه کل مجموع مربعات:

نام تحلیل واریانس از افراز کل تغییرپذیری به اجزای آن آمده است. از کل مجموع مربعات تصحیح شده، یعنی:

$$SS_{total} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$$

به عنوان اندازه ای از کل تغییرپذیری در داده ها استفاده می شود. به‌طور شهودی این موضوع منطقی است، زیرا اگر SS_{total} را بر تعداد درجات آزادی آن (در این حالت N-1=an-1) تقسیم می شود، واریانس نمونه ای y بدست می آید و واریانس نمونه البته اندازه متعارف تغییرپذیری است.

توجه کنید که کل مجموع مربعات تصحیح شده، SS_{total} را می توان به‌صورت زیر نوشت:

$$SS_{total} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = n\sum_{j=1}^{n} (\bar{y}_{i} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_{i})^2$$

روش فاکتوریل

تجزیه کل مجموع مربعات:

در نتیجه:

$$SS_{total}=SS_{treatment}+SS_{error}$$

$SS_{treatment}$ مجموع مربعات حاصل از تیمارها (یعنی، بین تیمارها)

SS_{error} مجموع مربعات حاصل از خطا (یعنی، درون تیمارها)

کلا N=an مشاهده وجود دارد، پس، N-1 درجه آزادی دارد. برای عامل، a سطح وجود دارد (و a میانگین تیماری)، بنابراین دارای a-1 درجه آزادی است. بالاخره درون هر تیمار n تکرار وجود دارد که دارای n-1 درجه آزادی است که در برآورد خطای آزمایش به‌کار می رود.

روش فاکتوریل

تجزیه کل مجموع مربعات:

کمیت های Ms_{error} و $Ms_{treatmnt}$ را میانگین مربعات می گویند که به‌صورت زیر می باشند:

$$Ms_{treatmnt} = \frac{ss_{treatmnt}}{a-1}$$

$$Ms_{error} = \frac{ss_{error}}{N-a}$$

فهرست

پیشگفتار

طراحی آزمایش و بهینه سازی

- روش فاکتوریل (تک عاملی)
  - تحلیل واریانس
  - تحلیل مدل اثرهای تثبیت شده
  - تجزیه کل مجموع مربعات
  - تحلیل آماری
- روش فاکتوریل (چند عاملی)
  - طرح عاملی با ۲ عامل
  - طرح عاملی 2^k
- تحلیل رگرسیون
  - رگرسیون خطی ساده
  - رگرسیون خطی چندگانه
- روش رویه پاسخ
  - طرح برازش مدل مرتبه دوم
  - روش تندترین صعود

روش فاکتوریل

تحلیل آماری:

آماره آزمون برای فرض عدم وجود اختلاف در میانگین تیمارها به‌صورت زیر است:

$$F_0 = \frac{Ms_{treatmnt}}{Ms_{error}}$$

برای اینکه میانگین تیمارها متفاوت باشد، باید شرط زیر برقرار گردد:

$$F_0 > F_{\alpha,a-1,N-a}$$

که را می‌توان از جدول‌های ANOVA به‌دست آورد.

روش فاکتوریل

تحلیل آماری:

در آزمون فرض ها ممکن است دو نوع خطا ایجاد شود. احتمال های این دو نوع خطا را با نمادهایی خاص نشان داده می شود.

$$\alpha = P(1st\ type\ of\ error)\ , \qquad \beta = P(2nd\ type\ of\ error)$$

شیوه کلی در آزمون فرض ها آن است که مقدار احتمال خطای نوع اول که اغلب به آن، سطح معنی دار بودن یک آزمون گفته می شود، مشخص گردیده و سپس شیوه آزمون طوری انتخاب می گردد که احتمال خطای نوع دوم به‌صورتی مناسب مقداری کوچک باشد.

در بیشتر نرم‌افزارهای آماری برای سهولت در تصمیم‌گیری نسبت به نتیجه آزمون فرض آماری، یک شاخص به‌نام مقدار احتمال P-Value ارائه می‌شود، این مقدار به محقق کمک می‌کند که بدون مراجعه به جداول توزیع‌های آماری بتواند درمورد رد یا عدم رد فرض صفر تصمیم بگیرد.

روش فاکتوریل

تحلیل آماری:

هر چند آزمون فرض شیوه ای مفید است اما گاهی گویای تمامی ماجرا نیست. اغلب به‌دست آوردن بازه ای که انتظار داریم مقدار پارامتر یا پارامترهای مورد نظر را دربرگیرد، ارجح است. چنین احکام بازه ای را بازه اطمینان می گویند. برای تعریف یک بازه اطمینان، اگر θ پارامتری نامعلوم باشد. برای به‌دست آوردن بازه برآورد θ، به تعیین دو آماره L و U به‌طوریکه:

$$P(L \leq \theta \leq U) = 1 - \alpha$$

بازه $L \leq \theta \leq U$ بازه اطمینان با مقدار $100(1-\alpha)$ درصد برای پارامتر θ

تعبیر این بازه آن است که اگر در تکرار نمونه‌گیری تصادفی تعداد زیادی از این‌گونه بازه‌ها ساخته شود، $100(1-\alpha)$ درصد آن‌ها شامل مقدار واقعی پارامتر θ خواهند بود.

آماره‌های L و U به‌ترتیب حدود پایین و بالای اطمینان

$1-\alpha$ ضریب اطمینان

α سطح ریسک

در تحلیل ها، مقدار α، برابر با عدد ۰.۰۵ است که در آن صورت بازه اطمینان را یک بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای θ می نامند.

روش فاکتوریل

تحلیل آماری:

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	F_0
بین تیمار	$Ss_{treatmnt}$	a-1	$Ms_{treatmnt}$	$\frac{Ms_{treatmnt}}{Ms_{error}}$
خطا (درون تیمارها)	Ss_{error}	N-a	Ms_{error}	-
کل	Ss_{total}	N-1	-	-

روش فاکتوریل

تحلیل آماری:

روابط زیر برای تکمیل جدول فوق، مورد استفاده قرار می گیرد:

$$SS_{total} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SS_{treatment} = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i.}^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SS_{error} = SS_{total} - SS_{treatment}$$

مقدار F عبارت از نسبت واریانس باقیمانده در یک مدل بدون متغیر پیش‌بینی کننده در مقابل یک مدل با متغیر پیش‌بینی کننده است. اگر مقدار F به اندازه کافی بزرگ باشد نشان می‌دهد که مدل قابل توجه است.

روش فاکتوریل

تحلیل آماری:

R^2 (ضریب تعیین)، اندازه‌گیری آماری نزدیک داده‌ها به خط رگرسیون برازش شده است.

هرچه مقدار R^2 بزرگتر باشد، مدل حاصل از داده‌ها مناسبتر است. مقدار R^2 همیشه بین ۰ تا ۱۰۰ درصد است و همیشه با اضافه کردن متغیرهای پیش‌بینی کننده به یک مدل، افزایش می‌یابد. به‌عنوان مثال، R^2 بهترین مدل با پنج متغیر پیش‌بینی کننده، حداقل به اندازه R^2 بهترین مدل با چهار متغیر پیش‌بینی کننده است؛ بنابراین، R^2 هنگامی که مدل‌هایی با داده‌های یکسان مقایسه می‌شود، بسیار مفید است.

رابطه R^2 در زیر آورده شده است:

$$R^2 = \frac{SS_{Model}}{SS_{Total}}$$

SS_{Model} مجموع مربعات مربوط به عامل‌ها و تمامی ضرایب و برهم‌کنش‌های مربوط به عامل‌ها

SS_{Total} مجموع مربعات مربوط به مدل و خطا

روش فاکتوریل

تحلیل آماری:

$R^2(adj)$: ضریب تعیین تعدیل شده

زمانی از $R^2(adj)$ استفاده می‌شود که مدل‌هایی با تعداد متفاوت متغیر پیش‌بینی کننده مورد مقایسه باشند. مقدار $R^2(adj)$ همیشه وقتی یک متغیر پیش‌بینی کننده به مدل اضافه می‌شود، حتی اگر هیچ پیشرفت واقعی برای مدل وجود نداشته باشد، افزایش می‌یابد.

مقدار $R^2(adj)$ تعداد متغیرهای پیش‌بینی کننده را در مدل لحاظ می‌کند تا در انتخاب مدل صحیح کمک کند.

رابطه $R^2(adj)$ در زیر آورده شده است:

$$Adjusted(R^2) = 1 - \frac{SS_E / df_E}{SS_{Total} / df_{Total}}$$

SS_E مجموع مربعات خطا

df_E تعداد درجه آزادی خطا

df_{Total} تعداد کل درجه آزادی

روش فاکتوریل

تحلیل آماری:

همچنین $R^2(pred)$ نشان می‌دهد که یک مدل رگرسیون به چه میزان پیش‌بینی‌ها را درست انجام می‌دهد. از $R^2(pred)$ استفاده می‌شود تا تعیین شود که مدل حاصل، پاسخ برای مشاهدات جدید را چگونه پیش‌بینی می‌کند. مدل‌هایی که مقادیر $R^2(pred)$ بزرگتر دارند، توانایی پیش‌بینی بهتری دارند. $R^2(pred)$ همچنین می‌تواند برای مقایسه مدل‌های $R^2(adj)$ بسیار مفید باشد، زیرا با مشاهداتی که در محاسبه مدل گنجانده نشده است محاسبه می‌شود.

رابطه $R^2(\text{pred})$ در زیر آورده شده است:

$$Predicted(R^2) = 1 - \frac{PRESS}{SS_{Total}}$$

$PRESS$ معیاری برای ارزیابی عملکرد مدل جهت پیش‌بینی داده‌های جدید. در واقع $PRESS$ مخفف مجموع مربعات خطای پیش‌بینی است، که بر اساس خطاهای پیش‌بینی حاصل از پیش‌بینی مشاهده i از طریق مدلی که تمام مشاهدات به غیر از مشاهده i را در بر می‌گیرد، محاسبه می‌شود؛ مدلی که از مقدار $PRESS$ کوچکی برخوردار باشد، می‌تواند پیش‌بینی کننده خوبی محسوب شود.

فهرست

- پیشگفتار
- طراحی آزمایش و بهینه سازی
  - روش فاکتوریل (تک عاملی)
    - تحلیل واریانس
    - تحلیل مدل اثرهای تثبیت شده
    - تجزیه کل مجموع مربعات
    - تحلیل آماری
  - روش فاکتوریل (چند عاملی)
    - طرح عاملی با ۲ عامل
    - طرح عاملی 2^k
  - تحلیل رگرسیون
    - رگرسیون خطی ساده
    - رگرسیون خطی چندگانه
  - روش رویه پاسخ
    - طرح برازش مدل مرتبه دوم
    - روش تندترین صعود

روش فاکتوریل

بسیاری از آزمایش ها شامل مطالعه اثرهای دو یا بیشتر از دو عامل اند. به‌طور کلی برای این نوع آزمایش ها، طرح های عاملی کاراترین هستند. منظور از یک طرح عاملی آن است که در هر امتحان کامل یا تکرار آزمایش تمام ترکیب های ممکن سطوح عامل ها بررسی شوند.

مثلا اگر a سطح برای عامل A و b سطح برای عامل B وجود داشته باشند، آنگاه هر تکرار شامل تمامی ترکیب های تیماری ab است. وقتی عامل ها در طرح عاملی منظور شوند، اغلب گفته می شود که تقاطعی اند. بنا به تعریف، اثر یک عامل برابر با تغییر در پاسخ حاصل به‌وسیله تعویض سطح آن عامل است. این اثر را اغلب اثر اصلی می نامند، زیرا که به عوامل اصلی مورد نظر مربوط می شود.

روش فاکتوریل

یک آزمایش عاملی بدون اثر متقابل

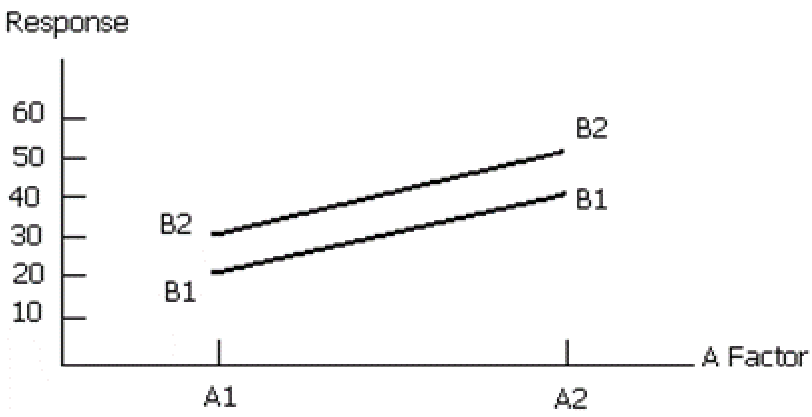
		عامل B	
		B_1	B_2
عامل A	A_1	۲۰	۳۰
	A_2	۴۰	۵۲

یک آزمایش عاملی با اثر متقابل

		عامل B	
		B_1	B_2
عامل A	A_1	۲۰	۴۰
	A_2	۵۰	۱۲

روش فاکتوریل

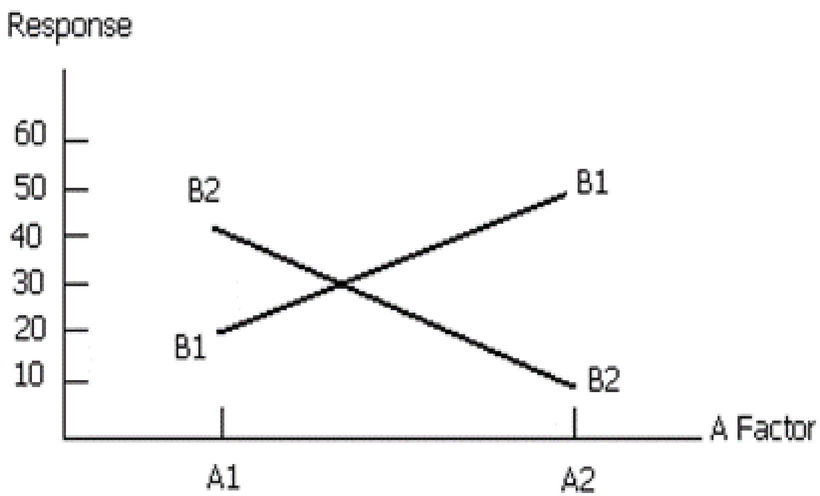
آزمایش عاملی بدون اثر متقابل



خطوط موازی دلالت بر عدم وجود اثر متقابل

بین عوامل A و B می کند.

آزمایش عاملی با اثر متقابل



خطوط شکسته نشانه ای از وجود اثر متقابل

بین عوامل A و B است.

فهرست

- پیشگفتار
- طراحی آزمایش و بهینه سازی
  - روش فاکتوریل (تک عاملی)
    - تحلیل واریانس
    - تحلیل مدل اثرهای تثبیت شده
    - تجزیه کل مجموع مربعات
    - تحلیل آماری
  - روش فاکتوریل (چند عاملی)
    - طرح عاملی با ۲ عامل
    - طرح عاملی 2^k
  - تحلیل رگرسیون
    - رگرسیون خطی ساده
    - رگرسیون خطی چندگانه
  - روش رویه پاسخ
    - طرح برازش مدل مرتبه دوم
    - روش تندترین صعود

روش فاکتوریل

طرح های عاملی با ۲ عامل:

ساده ترین انواع طرح های عاملی شامل تنها دو عامل یا مجموعه تیمار است. a سطح برای عامل A و b سطح برای عامل B وجود دارند، و این ها در یک طرح عاملی قرار می گیرند. یعنی هر تکرار آزمایش شامل کلیه ab ترکیب مختلف تیمار است. در حالت کلی n تکرار وجود دارد. فرض شود که y_{ijk}، پاسخ مشاهده شده، برای k امین تکرار (k=1,2,…,n) باشد، برای هنگامی که عامل A در سطح i (i=1,2,…,a) و عامل B در سطح j (j=1,2,…,b) است.

روش فاکتوریل

طرح های عاملی با ۲ عامل:

		عامل B		
		۱	...	b
عامل A	۱	$y_{111}, \dots, y_{11n}$	...	$y_{1b1}, \dots, y_{1bn}$
	...		...	
	a	$y_{a11}, \dots, y_{a1n}$	...	$y_{ab1}, \dots, y_{abn}$

روش فاکتوریل

طرح های عاملی با ۲ عامل:

ترتیب انتخاب abn مشاهده، تصادفی است، به‌طوری که این طرح یک طرح کاملا تصادفی شده است. مشاهدات را می توان با مدل خطی آماری، به‌صورت رابطه زیر بیان کرد:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \; : \; i = 1,2,\ldots,a; \; j = 1,2,\ldots,b; \; k = 1,2,\ldots,$$

μ میانگین کل اثر

τ_i اثر سطح i ام عامل سطر A

β_j اثر سطح j ام عامل ستون B

$(\tau\beta)_{ij}$ اثر متقابل میان τ_i و β_j

ε_{ijk} مولفه خطای تصادفی

روش فاکتوریل

طرح های عاملی با ۲ عامل:

فرمول های محاسبه مجموع مربعات نیز به‌صورت زیر می باشند:

$$SS_{total} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$SS_A = \sum_{i=1}^{a} \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$SS_B = \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{.j.}^2}{an} - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$SS_{AB} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{y_{ij.}^2}{n} - \frac{y_{...}^2}{abn} - SS_A - SS_B$$

$$SS_{error} = SS_{total} - SS_{subsystem(ABC)} = SS_{total} - SS_A - SS_B - SS_{AB}$$

روش فاکتوریل

طرح های عاملی با ۲ عامل:

منبع تغییر	مجموع مربعات	درجات آزادی	میانگین مربعات	F_0
تیمارهای A	SS_A	$a-1$	$MS_A=\frac{SS_A}{a-1}$	$\frac{MS_A}{MS_{error}}$
تیمارهای B	SS_B	$b-1$	$MS_B=\frac{SS_B}{b-1}$	$\frac{MS_B}{MS_{error}}$
اثر متقابل AB	SS_{AB}	$(a-1)(b-1)$	$MS_{AB}=\frac{SS_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{MS_{AB}}{MS_{error}}$
خطا	SS_{error}	$ab(n-1)$	$MS_{error}=\frac{SS_{error}}{ab(n-1)}$	-
کل	SS_{total}	$abn-1$		-

فهرست

- پیشگفتار
- طراحی آزمایش و بهینه سازی
  - روش فاکتوریل (تک عاملی)
    - تحلیل واریانس
    - تحلیل مدل اثرهای تثبیت شده
    - تجزیه کل مجموع مربعات
    - تحلیل آماری
  - روش فاکتوریل (چند عاملی)
    - طرح عاملی با ۲ عامل
    - طرح عاملی 2^k
  - تحلیل رگرسیون
    - رگرسیون خطی ساده
    - رگرسیون خطی چندگانه
  - روش رویه پاسخ
    - طرح برازش مدل مرتبه دوم
    - روش تندترین صعود

روش فاکتوریل

طرح های عاملی $2^{\mathbf{k}}$

مدل آماری برای یک طرح 2^k شامل k اثر اصلی، $\binom{k}{2}$ اثر مثقابل دوعاملی، $\binom{k}{3}$ اثر متقابل سه عاملی و غیره، و یک اثر متقابل k عاملی است. یعنی برای طرح 2^k مدل کاملی آماری شامل 2^{k-1} اثر است. برای برآورد یک اثر یا برای محاسبه مجموع مربعات یک اثر، ابتدا باید مقابله مربوط به آن اثر تعیین شود.

به‌طور کلی، مقابله اثر AB…K با باز کردن طرف راست رابطه:

$$(Contrast)_{AB\ldots K} = (a \pm 1)(b \pm 1) \ldots (k \pm 1)$$

در بسط رابطه فوق، با قرار دادن نماد (۱) به جای عدد یک در عبارت نهایی از جبر معمولی استفاده می شود. داخل هر پرانتز علامت یک را منفی گرفته، اگر عامل شامل اثر باشد و آن را مثبت گرفته، اگر عامل شامل اثر نباشد.

روش فاکتوریل

طرح های عاملی 2^k

به محض محاسبه مقابله اثرها، می شود برآورد اثرها و مجموع مربعات اثرها را به ترتیب بر اساس زیر محاسبه کرد، که در آن n تعداد تکرارهاست:

$$AB \dots K = \frac{2}{n.2^k}[(Contrast)_{AB\dots K}]$$

$$SS_{AB\dots K} = \frac{2}{n.2^k}[(Contrast)_{AB\dots K}]^2$$

روش فاکتوریل

طرح های عاملی 2^k

درجات آزادی	مجموع مربعات	منبع تغییر	انواع اثرها
1	SS_A	A	k اثر اصلی
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
1	SS_K	K	
1	SS_{AB}	AB	$\binom{k}{2}$ اثر متقابل دو عاملی
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
1	SS_{JK}	JK	
1	SS_{ABC}	ABC	$\binom{k}{3}$ اثر متقابل سه عاملی
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
1	SS_{IJK}	IJK	
1	$SS_{AB\ldots K}$	ABC…K	$\binom{k}{k}=1$ اثر متقابل k عاملی
$2^k(n-1)$	SS_{error}	خطا	-
$n.2^k-1$	SS_{total}	مجموع	-

فهرست

پیشگفتار

طراحی آزمایش و بهینه سازی

روش فاکتوریل (تک عاملی)

تحلیل واریانس

تحلیل مدل اثرهای تثبیت شده

تجزیه کل مجموع مربعات

تحلیل آماری

روش فاکتوریل (چند عاملی)

طرح عاملی با ۲ عامل

طرح عاملی 2^k

تحلیل رگرسیون

رگرسیون خطی ساده

رگرسیون خطی چندگانه

روش رویه پاسخ

طرح برازش مدل مرتبه دوم

روش تندترین صعود

تحلیل رگرسیون

در بسیاری از مسائل، دو یا چند متغیر به هم وابسته اند، و مدل بندی و بررسی این بستگی مهم است. به طور کلی، گیریم یک متغیر وابسته یا پاسخ y وجود داشته باشد که به k متغیر مستقل یا متغیر رگرسور مثلا $x_1,x_2,\ldots,x_k$ وابسته است. بستگی بین این متغیرها به وسیله مدلی ریاضی که آن رابطه رگرسیون نامیده می شود، مشخص می گردد. عملا یک مدل رگرسیونی، به مجموعه داده های نمونه برازش می یابد.

در بعضی موارد، آزمایشگر شکل دقیق بستگی تابعی بین y و $x_1,x_2,\ldots,x_k$ مثلا $y=\phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ را می داند. اما در بسیاری از موارد بستگی واقعی تابعی نامعلوم است، و آزمایشگر خود یک تابع مناسب را برای تقریب کردن ϕ برمی گزینند. برای تقریب کردن توابع، از مدل های چندجمله ای زیاد استفاده می کنند. در اکثر مواقع، در تحلیل داده های مربوط به آزمایش های طرح نشده، مانند آنچه ممکن است از مشاهدات پدیده های کنترل نشده یا گزارشات تاریخی پیش بیاید از روش های رگرسیونی استفاده می شود. در آزمایش های طرح شده نیز، تحلیل رگرسیون بسیار مفید است. در یک آزمایش طرح شده تحلیل واریانس به معلوم کردن عوامل مهم کمک می کند و از رگرسیون در ساختن یک مدل کمی که عوامل مهم را به پاسخ ربط می دهد، استفاده می شود.

فهرست

- پیشگفتار
- طراحی آزمایش و بهینه سازی
  - روش فاکتوریل (تک عاملی)
    - تحلیل واریانس
    - تحلیل مدل اثرهای تثبیت شده
    - تجزیه کل مجموع مربعات
    - تحلیل آماری
  - روش فاکتوریل (چند عاملی)
    - طرح عاملی با ۲ عامل
    - طرح عاملی 2^k
  - تحلیل رگرسیون
    - رگرسیون خطی ساده
    - رگرسیون خطی چندگانه
  - روش رویه پاسخ
    - طرح برازش مدل مرتبه دوم
    - روش تندترین صعود

تحلیل رگرسیون

رگرسیون خطی ساده:

در رگرسیون خطی ساده، قرار است بستگی موجود بین تک متغیر مستقل x و متغیر پاسخ، y، تعیین شود. معمولا، متغیر مستقل x که قابل کنترل به وسیله آزمایشگر است، متغیری پیوسته گرفته می شود. پس از آن، اگر آزمایش طرح شده باشد، با انتخاب مقادیر x، مقدار متناظر y مشاهده میگردد. اگر فرض شود که بستگی واقعی بین x و y یک خط مستقیم و در هر سطح x، مشاهده y یک متغیر تصادفی باشد. حال مقدار امید ریاضی y برای هر مقدار x به‌صورت زیر می باشد:

$$E(y|x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

پارامترهای β_0 و β_1 خط مستقیم مقادیر ثابت نامعلوم هستند.

فرض می شود هر مشاهده y را بتوان با مدل زیر توصیف کرد:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

ε خطای تصادفی با میانگین صفر و واریانس σ^2 است. پذیرفته میشود که εها، متغیرهای تصادفی ناهمبسته اند. مدل رگرسیونی فوق که شامل تنها یک متغیر مستقل x است، اغلب مدل خطی ساده رگرسیونی گفته می شود.

تحلیل رگرسیون

رگرسیون خطی ساده:

اگر n جفت داده، وجود داشته باشد، می توان به روش کمترین مربعات، پارامترهای مدل را برآورده ساخته و بدین ترتیب:

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 x_j + \varepsilon_j \; j = 1,2,\dots,n$$

و تابع کمترین مربعات به‌صورت زیر می باشد:

$$L = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2 = \sum_{j=1}^{n} (y_j - \beta_0 + \beta_1 x_j)^2$$

اگر مدل فوق را به‌صورت زیر نوشته شود:

$$y = \beta_0' + \beta_1 (x - \bar{x}) + \varepsilon$$

که در آن:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \,, \beta_0' = \beta_0 + \beta_1 \bar{x}$$

رگرسیون خطی ساده:

با کمینه سازی تابع کمترین مربعات، مدل به‌صورت زیر برازنده می شود.

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

که در آن:

$$\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_0' - \hat{\beta}_1 \bar{x}, \hat{\beta}_0' = \bar{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \, , \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j (x_j - \bar{x})}{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})^2}$$

فهرست

- پیشگفتار
- طراحی آزمایش و بهینه سازی
  - روش فاکتوریل (تک عاملی)
    - تحلیل واریانس
    - تحلیل مدل اثرهای تثبیت شده
    - تجزیه کل مجموع مربعات
    - تحلیل آماری
  - روش فاکتوریل (چند عاملی)
    - طرح عاملی با ۲ عامل
    - طرح عاملی 2^k
  - تحلیل رگرسیون
    - رگرسیون خطی ساده
    - رگرسیون خطی چندگانه
  - روش رویه پاسخ
    - طرح برازش مدل مرتبه دوم
    - روش تندترین صعود

تحلیل رگرسیون

رگرسیون خطی چندگانه:

در رگرسیون خطی چندگانه، بسیاری از مسائل رگرسیون شامل بیش از یک متغیر مستقل اند. مسئله کلی برازش مدل:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

پارامترهای نامعلوم $\{\beta_j\}$ را معمولا ضرایب رگرسیونی می گویند. مدل فوق، یک ابر صفحه را در فضای k بعدی از متغیرهای مستقل $\{X_i\}$ توصیف می کند. برای برآورد ضرایب رگرسیونی از روش کمترین مربعات استفاده می شود.

تحلیل رگرسیون

رگرسیون خطی چندگانه:

با فرض n>k مشاهده و فرض x_{ij}، j امین مشاهده یا سطح متغیر x_i

	x_1	x_2	…	x_k
y_1	x_{11}	x_{21}	…	x_{k1}
y_2	x_{12}	x_{22}	…	x_{k2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
y_n	x_{1n}	x_{2n}	…	x_{kn}

تحلیل رگرسیون

رگرسیون خطی چندگانه:

می توان مدل را برحسب داده ها به‌صورت زیر نوشت:

$$y_j = \beta_o + \beta_1 x_{1j} + \beta_2 x_{2j} + \cdots + \beta_k x_{kj} + \varepsilon_j = \beta_o + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \, x_{ij} + \varepsilon_j j = 1,2, \dots, n$$

مانند حالت رگرسیون خطی ساده، عرض از مبداء به‌صورت زیر تعریف می شود:

$$\beta_o' = \beta_o + \beta_1 \bar{x}_1 + \beta_2 \bar{x}_2 + \cdots + \beta_k \bar{x}_k$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

متوسط سطح i امین متغیر پاسخ است.

تحلیل رگرسیون

رگرسیون خطی چندگانه:

پس مدل فوق عبارت است از:

$$y_j = \beta_o' + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \left(x_{ij} - \bar{x}_i\right) + \varepsilon_j$$

و تابع کمترین مربعات:

$$L = \sum_{j=1}^{n} \left[y_j - \beta_o' - \sum_{i=1}^{k} \beta_i \left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)\right]^2$$

با کمینه کردن تابع کمترین مربعات، پارامترهای $\beta_k, \ldots, \beta_1, \beta_o'$ به‌دست می آیند. برای هر ضریب نامعلوم رگرسیونی، یک رابطه، یعنی جمعا p=k+1 رابطه نرمال وجود دارد. جواب های معادلات نرمال برآورد کننده های کمترین مربعات، $\hat{\beta}_k, \ldots, \hat{\beta}_1, \hat{\beta'}_o$ هستند.

رگرسیون خطی چندگانه:

اگر معادلات، ابتدا با نماد ماتریسی بیان شود، حل معادلات نرمال ساده تر می شود. مدل برحسب مشاهدات، را می توان با نماد ماتریس به‌صورت زیر نوشت:

$$y = X\beta + \varepsilon$$

که در آن:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} - \bar{x}_1 & x_{21} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{k1} - \bar{x}_k \\ 1 & x_{12} - \bar{x}_1 & x_{22} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{k2} - \bar{x}_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} - \bar{x}_1 & x_{2n} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{kn} - \bar{x}_k \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta'_o \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

y بردار $(n \times 1)$ پاسخ ها

X ماتریس $(n \times k)$ سطوح متغیرهای مستقل

β بردار $(k \times 1)$ ضرایب رگرسیونی

ε بردار $(n \times 1)$خطاهای تصادفی

تحلیل رگرسیون

رگرسیون خطی چندگانه:

تابع کمترین مربعات به‌صورت زیر است:

$$L = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2 = \varepsilon^T \varepsilon = (y - X\beta)^T (y - X\beta)$$

به این ترتیب:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

و پاسخ نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 (x_1 - \bar{x}_1) + \cdots + \hat{\beta}_k (x_k - \bar{x}_k)$$

فهرست

پیشگفتار

طراحی آزمایش و بهینه سازی

روش فاکتوریل (تک عاملی)

تحلیل واریانس

تحلیل مدل اثرهای تثبیت شده

تجزیه کل مجموع مربعات

تحلیل آماری

روش فاکتوریل (چند عاملی)

طرح عاملی با ۲ عامل

طرح عاملی 2^k

تحلیل رگرسیون

رگرسیون خطی ساده

رگرسیون خطی چندگانه

روش رویه پاسخ

طرح برازش مدل مرتبه دوم

روش تندترین صعود

روش رویه پاسخ

روش شناسی رویه پاسخ ، گردایه ای از تکنیک های ریاضی و آمار است که برای مدل بندی و تحلیل مسائلی که پاسخ مورد نظر تحت تاثیر چندین متغیر قرار می گیرد، مفید است و هدف آن بهینه سازی این پاسخ است. دراکثر مسائل مربوط به روش شناسی رویه پاسخ، صورت بستگی بین پاسخ و متغیرهای مستقل نا–معلوم است. پس اولین قدم در رویه پاسخ، یافتن تقریبی مناسب برای بستگی واقعی موجود بین پاسخ و مجموعه متغیرهای مستقل است. معمولا از چند جمله ای های مرتبه پایین در ناحیه ای از مقادیر متغیرهای مستقل استفاده می شود. اگر پاسخ به خوبی، بوسیله یک تابع خطی از متغیرهای مستقل مدل بندی شده باشد، آن گاه تابع تقریب کننده، برای مدل مرتبه اول به‌صورت زیر خواهد بود:

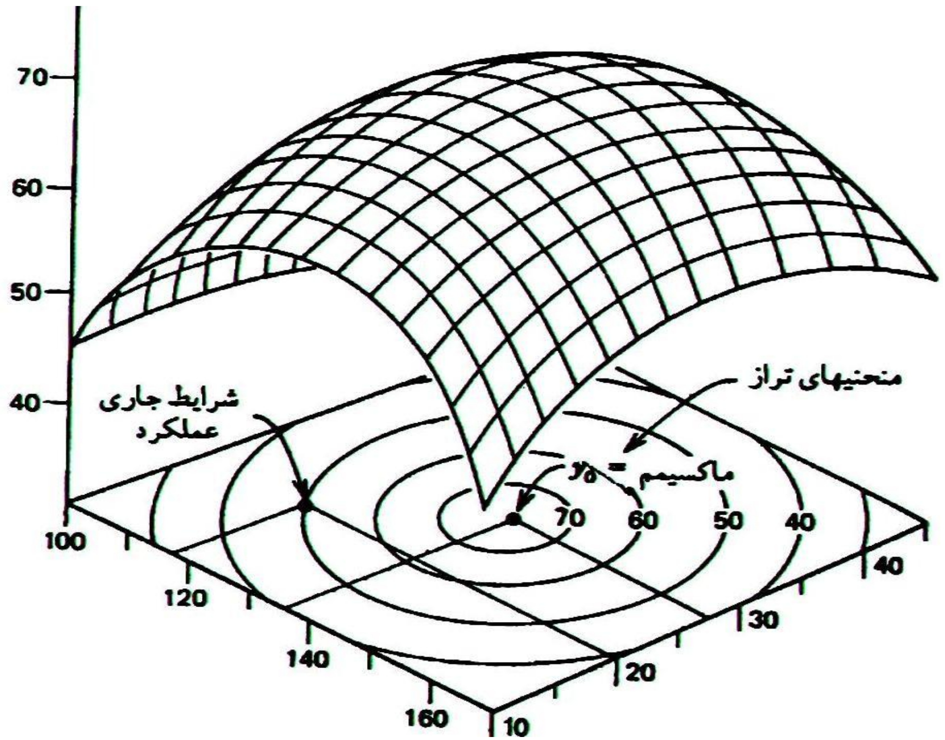
$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_K x_K + \varepsilon$$

اگر در سیستم، خمیدگی وجود داشته باشد، آن گاه باید از چندجمله ای های مرتبه بالاتر، مانند مدل مرتبه دوم استفاده کرد.

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i} \sum_{j} \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon$$

روش رویه پاسخ

رویه پاسخ و منحنی های تراز مربوطه



فهرست

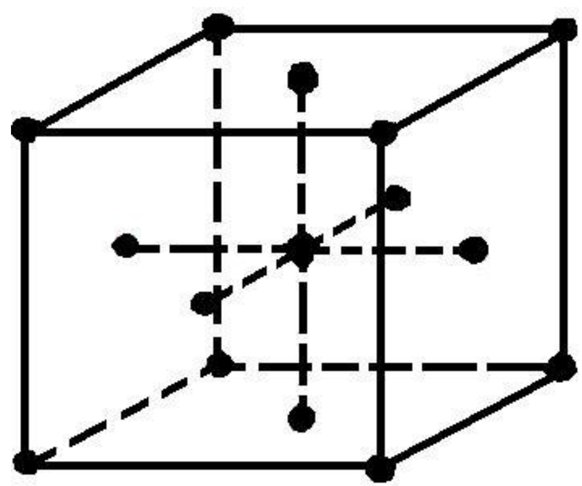
پیشگفتار
طراحی آزمایش و بهینه سازی
روش فاکتوریل (تک عاملی)
تحلیل واریانس
تحلیل مدل اثرهای تثبیت شده
تجزیه کل مجموع مربعات
تحلیل آماری
روش فاکتوریل (چند عاملی)
طرح عاملی با ۲ عامل
طرح عاملی 2^k
تحلیل رگرسیون
رگرسیون خطی ساده
رگرسیون خطی چندگانه
روش رویه پاسخ
طرح برازش مدل مرتبه دوم
روش تندترین صعود

روش رویه پاسخ

طرح های برازش مدل مرتبه دوم:

یک طرح مرکب مرکزی متمرکز، با مقدار سه برای k در شکل نشان داده شده است. از این طرح مرکب مرکزی، گاهی به این دلیل استفاده می شود که این طرح تنها نیاز به سه سطح برای هر عامل دارد و در عمل معمولا تغییر سطوح عامل، مشکل است. اما طرح های مرکب مرکزی متمرکز شده در وجوه، دوران پذیر نیستند، و این وضع نامساعد جدی قلمداد می شود.

طرح مرکب مرکزی متمرکز شده در وجوه برای k=۳



فهرست

پیشگفتار

طراحی آزمایش و بهینه سازی

روش فاکتوریل (تک عاملی)

تحلیل واریانس

تحلیل مدل اثرهای تثبیت شده

تجزیه کل مجموع مربعات

تحلیل آماری

روش فاکتوریل (چند عاملی)

طرح عاملی با ۲ عامل

طرح عاملی 2^k

تحلیل رگرسیون

رگرسیون خطی ساده

رگرسیون خطی چندگانه

روش رویه پاسخ

طرح برازش مدل مرتبه دوم

روش تندترین صعود

روش رویه پاسخ

روش تندترین صعود:

مدل برازنده شده به‌صورت زیر است:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^{K} \hat{\beta}_j x_j$$

رویه مرتبه اول پاسخ، یعنی منحنی های تراز $\hat{y}$ ، یک سری خطوط موازی هستند. مسیر تندترین صعود مسیری است که طی آن، $\hat{y}$ با حداکثر سرعت اضافه می شود. این مسیر با قائم بر رویه پاسخ برازنده شده، موازی است.

معمولا برای مسیر تندترین صعود، خطی در نظر گرفته می شود که از مرکز ناحیه مورد نظر گذشته و قائم بر رویه برازنده شده باشد. پس، گام ها در طول مسیر متناسب با ضرائب رگرسیونی هستند. اندازه واقعی گام به وسیله آزمایشگر و بر مبنای اطلاع از فرآیند یا ملاحظات عملی دیگر است.

مراجع و منابع

[۱] م. آزادی، تحلیل و بهبود رفتار NVH بدنه یک خودروی سواری بر اساس روش DOE، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ۱۳۸۷.

[۲] ف. احدی، بهینه‌سازی نوع و ضخامت پوشش حائل حرارتی به‌منظور بهبود بازدهی و توان موتور استرلینگ نوع گاما، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه سمنان، ۱۳۹۸.

[3] D. C. Montgoery, Design and analysis of experiments, Wiley, New York, 2012.

[4] M. Azadi, M. Farzannasab, Evaluation of high-cycle fatigue behavior in compact bones at different loading frequencies, Meccanica, 2018.

[5] M. Azadi, M. Iziy, A. Marbout, M. Azadi, A. Hajiali Mohammadi, Optimization of solution temperature and time in nickel-based superalloy of engine turbo-charger based on hardness by design of experiment, Engine Research, Vol. 43, pp. 63–70, 2016.

[6] S. Safarloo, F. Loghman, M. Azadi, M. Azadi, Optimal design experiment of ageing time and temperature in inconel-713C superalloy based on hardness objective, Transactions of the Indian Institute of Metals, Vol. 71, pp. 1563-1572, 2018.

[۷] م. آزادی،غ. فرهی، بررسی مکانیزم‌های خرابی در پوشش‌های حائل حرارتی تحت بارگذاری خستگی هم‌دما و غیرهم‌دما با طراحی آزمایش‌ها، فصلنامه علمی پژوهشی مهندسی مکانیک جامدات، ۱۳۹۵.

[۸] م. آزادی، م. ایزی، آ. مربوط، م. آزادی، ع. ح. ع. محمدی، بهینه‌سازی دما و زمان انحلال در ابرهمبسته پایه نیکل پرخوران موتور براساس سختی به روش طراحی آزمایش‌ها، فصلنامه علمی- پژوهشی تحقیقات موتور، ۱۳۹۵.

پایان

با تشکر از دغدغه شما برای یادگیری

با آرزوی موفقیت در مسیری که انتخاب کرده اید!؟

(با هدف گذاری...؟ و با برنامه ریزی برای رسیدن به هدف...؟)

Email: m.azadi.1983@gmail.com